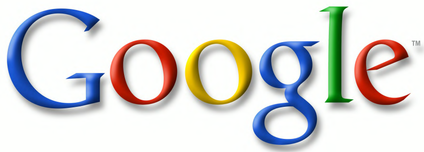
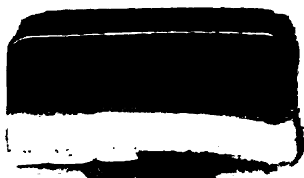


DE THEORIE DER KWADRATISCHE VORMEN VAN ONEINDIG VELE VERANDERLIJKEN EN HARE TOEPASSING OP DE LINEAIRE INTEGRAALVERGELIJKINGEN.

W. F. DE GROOT.



(60)

DE THEORIE DER KWADRATISCHE VORMEN VAN ONEINDIG VELE VERANDERLIJKEN EN HARE TOEPASSING OP DE LINEAIRE INTEGRAALVERGELIJKINGEN.

DE THEORIE DER KWADRATISCHE VORMEN VAN ONEINDIG VELE VERANDERLIJKEN EN HARE TOEPASSING OP DE LINEAIRE INTEGRAALVERGELIJKINGEN.

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE, AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS DR. G. JELGERSMA, HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT, TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE TE VERDEDIGEN OP VRIJDAG 28 NOVEMBER, DES NAMIDDAGS TE 4 UREN DOOR * * * * * * * * * * * * * * *

WILLEM FRITS DE GROOT,
GEBOREN TE ROTTERDAM.



BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ VOORHEEN E. J. BRILL, LEIDEN. — 1913.



BOEKDRUKKERIJ VOORHEEN E. J. BRILL. — LEIDEN.

AAN MIJNE OUDERS
EN MIJNE VROUW.

VOORWOORD.

Bij het voleindigen van mijne studie betuig ik aan alle Hoogleeraren en Oudhoogleeraren van de wis- en natuurkundige faculteit, die tot mijne vorming hebben bijgedragen, mijn dank voor het onderwijs, dat ik bij hen genoten heb.

Vooral geldt dit U, Hooggeleerde KLUYVER, *Uwe geanimeerde, tot onderzoek opwekkende colleges, zijn van grooten invloed geweest op de keuze mijner studierichting; bovendien zal ik U steeds erkentelijk blijven voor de bereidwilligheid, waarmee Gij de taak van promotor op U genomen hebt en voor de belangstelling, die ik tijdens de wording van dit proefschrift van U mocht ondervinden.*

INHOUD.

MRC

INLEIDING.

De problemen der mathematische physica leiden veelal tot het onderzoek van functies, die aan zekere differentiaalvergelijkingen en gegeven randvoorwaarden moeten voldoen. De studie van de eigenschappen van dergelijke functies is derhalve een van de gewichtigste diensten, die de natuurwetenschappen van de analyse verlangen. Voor den wiskundige echter, die zich op zuiver wiskundig standpunt stelt, rijst nog de belangrijke vraag, of het probleem wel eene oplossing heeft; de natuurkundige daarentegen twijfelt er niet aan, dat er in elk bijzonder geval wel eene functie is, die zijn vraagstuk oplost. Zoo zijn o. a. van de problemen van DIRICHLET en NEUMANN, die hier op neerkomen, dat men eene functie $\Phi(x, y, z)$ tracht te vinden, die aan de vergelijking van LAPLACE, d. i. aan de partiëele differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

en aan zekere randvoorwaarden voldoet, reeds in vele bijzondere gevallen de oplossingen gevonden, voordat het gelukte aan te toonen, dat in het algemeen het vraagstuk oplosbaar is. Behalve tot differentiaalvergelijkingen leiden de physische problemen weleens tot voorwaarden van anderen aard. Zoo kwam ABEL [1]) in 1828 bij de oplossing van een vraagstuk der mechanica op eene vergelijking van den vorm

$$(1) \qquad f(x) = \int_0^x \frac{\Phi(y)}{(x-y)^\lambda} dy, \qquad (0 < \lambda < 1)$$

waaraan de gezochte functie $\Phi(y)$ moest voldoen, en hij toonde aan, dat geene andere functie, dan

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \sin \lambda \pi \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(y)\, dy}{(x-y)^{1-\lambda}}$$

aan deze betrekking kan voldoen.

Ook komt het veelvuldig voor, dat, wanneer de gevraagde functie aan eene differentiaalvergelijking moet voldoen, deze voorwaarde zich in eene gedaante laat schrijven, waarbij de gezochte functie onder een integraalteeken voorkomt, zooals dat bij (1) het geval is.

1) CRELLE's J. deel I (1826) blz. 153.

Hiervan gaf LIOUVILLE [1]) in 1837 een voorbeeld door te bewijzen, dat de functie $\Phi(x)$, die aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\left[\rho^2-\sigma(x)\right]\Phi=0$$

voldoet en voor $x=a$ de waarde 1 aanneemt, terwijl $\frac{d\Phi}{dx}$ voor $x=a$ gelijk aan 0 is, dezelfde functie is, als die, welke de vergelijking

$$(2) \qquad \Phi(x)-\frac{1}{\rho}\int_a^x \sigma(y)\sin\rho(x-y)\,\Phi(y)\,dy=\cos\rho(x-a)$$

bevredigt. Maar afgezien van deze enkele gevallen, werden vergelijkingen als (1) en (2), die tegenwoordig den naam van integraalvergelijkingen dragen, langen tijd niet bestudeerd, totdat de oplossing van de problemen van DIRICHLET en NEUMANN van de oplossing eener integraalvergelijking afhankelijk werd gemaakt.

Zij namelijk gevraagd, eene functie van x, y en z te vinden, die binnen een gesloten oppervlak σ aan de vergelijking van LAPLACE voldoet en aan het oppervlak σ zekere voorgeschreven waarden aanneemt (probleem van DIRICHLET).

De potentiaaltheorie leert, dat eene functie van den vorm

$$V(M)=\int\rho(P)\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma_P$$

aan de vergelijking van LAPLACE voldoet.

Hierin is M het punt, waar men de potentiaal beschouwt, P een punt behoorende bij het oppervlakteelement $d\sigma_P$, ψ de hoek, dien PM maakt met de in P naar binnen getrokken normaal, terwijl r gelijk is aan MP; $\rho(P)$ is eene functie van P op het oppervlak, welke dus zoo gekozen moet worden, dat de potentiaal op het oppervlak de gegeven waarden aanneemt. De potentiaaltheorie leert verder, dat wanneer het punt M het oppervlak σ van den binnenkant nadert, de potentiaal aan de betrekking

$$V_{(+)}(M)=2\pi\rho(M)+\int\rho(P)\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma_P$$

voldoet.

Aangezien nu $V_+(M)$ als functie van M gegeven is, krijgt men dus, als men deze functie door $f(M)$ aanduidt, de vergelijking

$$f_1(M)=2\pi\rho(M)+\int\rho(P)\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma_P$$

als voorwaarde voor de te bepalen functie $\rho(P)$; waaruit men ziet, dat $\rho(P)$ oplossing van eene integraalvergelijking is.

De integraalvergelijkingen, waartoe men op deze wijze komt, zijn in het geval het probleem eendimensionaal is, van den vorm

---

1) LIOUVILLE's J. deel 4 (1839) blz. 233.

$$(3) \qquad \Phi(x) - \int_a^b K(x,y)\,\Phi(y)\,dy = f(x),$$

waarin $K(x,y)$, $f(x)$, a en b bekend zijn. Eene dergelijke vergelijking, waarin ook inplaats van b vaak x staat, is door HILBERT eene integraalvergelijking van de tweede soort genoemd, terwijl hij aan eene vergelijking van den vorm

$$\Phi(x) = \int_a^b K(x,y)\,\Phi(y)\,dy$$

den naam van integraalvergelijking der eerste soort heeft gegeven.

Vergelijking (1) is er eene van de eerste, vergelijking (2) van de tweede soort. De oplossingsmethoden, die LIOUVILLE en NEUMANN van (3) gegeven hebben zijn dezelfde; zij verkregen reeksen, die al of niet kunnen convergeeren, zoodat in het laatste geval geene oplossing werd verkregen; voor de convergentie mag n.l. $K(x,y)$ ($a \gtreqless x \gtreqless b$, $a \gtreqless y \gtreqless b$) niet te groot worden. Staat in (3) echter x voor b, dan is de verkregen reeks steeds convergent; dit geval werd vooral door VOLTERRA op eigen wijze onderzocht. Voert men op voorbeeld van POINCARÉ [1]) in (3) een parameter λ in, zoodat

$$(4) \qquad \Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\,\Phi(y)\,dy = f(x)$$

de vergelijking wordt, dan zal men voor voldoend kleine waarden van λ in het geval verkeeren, dat de genoemde reeks convergeert. POINCARÉ toonde aan, dat de oplossing van (4), die natuurlijk van λ afhangt, het quotient van twee in het geheele complexe vlak convergente machtreeksen in λ is. Maar aangezien de noemer voor zekere waarden van λ nul kan worden, zal de machtreeksontwikkeling der oplossing zelve alleen convergent zijn in een cirkel met den oorsprong tot middelpunt en gaande door dien wortel des noemers, die de kleinste absolute waarde heeft. Is deze wortel kleiner dan 1, dan kan dus de reeksontwikkeling niet convergeeren voor $\lambda = 1$; daar nu LIOUVILLE's en NEUMANN's reeks uit deze ontstaan door $\lambda = 1$ te stellen, wordt het duidelijk dat hunne methode slechts in bijzonder gunstige gevallen bruikbaar is.

Het is I. FREDHOLM [2]) aan wien het in 1900 gelukte de oplossing als het quotient van twee bestendig convergente machtreeksen te vinden; hij maakte hierbij gebruik van de ook reeds door VOLTERRA [3]) gebezigde

---

1) Sur les équations de la physique mathématique. Rend. del circolo mathematico di Palermo. t. 8 (1894). La méthode de NEUMANN et le problème de DIRICHLET. Acta math. Dl. 20 (1896—1897).

2) Sur une nouvelle methode pour la résolution du problème de DIRICHLET. *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar*, band 57 (1900) blz. 39.

Een omvangrijker verhandeling, getiteld „Sur une classe d'equations fonctionnelles", verscheen in 1903 in de *Acta Mathematica*, deel 27 blz. 365.

3) V. VOLTERRA. Sulla inversione degli integrali definiti. *Atti della reale Acc. delle Scienze di Torino* van 12 Januari, 8 Maart, 26 April 1896; blz. 311, 400, 557, 693.

V. VOLTERRA. *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei*. (1e Sem. 1896 blz. 177 en 289).

Eene samenvatting dezer zes verhandelingen is verschenen in de *Annali de Matematica*, 2e Serie band 25, 1897, blz. 163, onder den titel „Sopra alcuni questioni di inversione di integrali definiti".

methode der oneindig vele veranderlijken, die het transcendente probleem, eene integraalvergelijking op te lossen, terugbrengt tot de oplossing van een algebraïsch vraagstuk en een daarop volgenden grensovergang.

HILBERT heeft daarna het vraagstuk in zes achtereenvolgende mededeelingen in de Göttinger Nachrichten besproken [1]).

In de eerste dier mededeelingen past hij de methode der oneindig vele veranderlijken consequent toe. De gewichtigste in die verhandeling medegedeelde resultaten hebben betrekking op de ontwikkelbaarheid van functies in reeksen van door de kern $K(x, y)$ gedefinieerde functies, en op het bestaan van waarden van λ, waarvoor de noemer van FREDHOLM's oplossing nul wordt.

Voor symmetrische kernen bewijst HILBERT, dat er steeds eene zoodanige waarde is.

De tweede, derde, zesde en een deel der vijfde verhandeling van HILBERT zijn aan toepassingen gewijd. In het andere deel der vijfde wordt de integraalvergelijking opgelost op eene wijze, die wel de meest consequente toepassing van de methode der oneindig vele veranderlijken mag genoemd worden. HILBERT laat daarin n.l. zien, hoe de geheele theorie uiterst eenvoudig kan worden afgeleid uit de theorie der kwadratische vormen van oneindig vele veranderlijken, eene theorie, die hij in de vierde verhandeling tot dat doel heeft ontwikkeld. Het is deze methode, die in dit proefschrift hoofdzakelijk zal besproken worden.

Na in het eerste hoofdstuk een kort overzicht gegeven te hebben van de beide door HILBERT gebezigde methoden (eerste en vijfde mededeeling), leiden wij in het tweede en derde die eigenschappen van kwadratische vormen van oneindig vele veranderlijken af, die voor HILBERT's tweede methode noodig zijn. Deze zelf wordt dan in het vierde hoofdstuk ontwikkeld. Met een vijfde hoofdstuk, dat ter illustratie het systeem van orthogonale functies van eenige kernen bevat, eindigt dit proefschrift.

Ten slotte wil ik hier nog de aandacht vestigen op eene verhandeling van E. SMIDT, getiteld: „Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener", verschenen in de Math. Annalen band 63 (1905). Deze verhandeling is bijzonder geschikt, wanneer men zich zonder veel moeite op de hoogte wil stellen van de voornaamste resultaten uit de theorie der integraalvergelijkingen.

---

1) HILBERT, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Göttinger Nachrichten, math. phys. klasse 1904—1908, band I—VI.

HOOFDSTUK I.

---

§ 1. Overzicht van de methode, door Hilbert in zijne eerste verhandeling gebezigd.

Onder eene *vergelijking van Fredholm* verstaat men eene vergelijking van de volgende gedaante:

$$(1) \qquad f(s) = \Phi(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, \Phi(t)\, dt.$$

Hierin zijn $f(s)$ en $K(s, t)$ twee gegeven continue functies in het interval $(0, 1)$, λ is een willekeurige parameter; gevraagd wordt eene functie $\Phi(s)$ te vinden, die aan betrekking (1) voldoet. De functie $K(s, t)$, die men den *kern* van de integraalvergelijking noemt, zal ik, hoewel dit niet noodzakelijk is, van den beginne symmetrisch onderstellen. Het zal den lezer, uit den aard der afleidingen, van zelve duidelijk worden, welke eigenschappen hare geldigheid niet verliezen, wanneer $K(s, t)$ asymmetrisch is. Ook dient nog te worden opgemerkt, dat het interval $(0,1)$ vervangen mag worden door elk eindig interval (a, b), waarin $f(s)$ en $K(s, t)$ continu zijn. De keuze van het interval $(0, 1)$ heeft alleen het voordeel, dat de notaties wat eenvoudiger uitvallen.

Om van integraalvergelijking (1) op een stelsel van algebraïsche vergelijkingen te komen, verdeele men het interval $(0,1)$ door middel van de punten

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{n-1}{n}$$

in n gelijke deelen en vervange men de integraal

$$\int_0^1 K(s, t)\, \Phi(t)\, dt$$

bij benadering door de som

$$\frac{1}{n} K\left(s, \frac{1}{n}\right) \Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} K\left(s, \frac{2}{n}\right) \Phi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots + \frac{1}{n} K(s, t)\, \Phi\left(\frac{n}{n}\right).$$

Vergelijking (1) gaat dan over in de vergelijking

$$(2) \quad f(s) = \Phi(s) - \frac{\lambda}{n}\left\{K\left(s, \frac{1}{n}\right)\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + K\left(s, \frac{2}{n}\right)\Phi\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + K\left(s, \frac{n}{n}\right)\Phi\left(\frac{n}{n}\right)\right\},$$

die voor $n = \infty$ wederom in vergelijking (1) verandert.

Als men wil uitdrukken, dat aan (2) moet worden voldaan in de punten

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n},$$

dan komt men tot de vergelijkingen

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
f_1 &= \phi_1 - \frac{\lambda}{n}(K_{11}\phi_1 + \ldots\ldots\ldots + K_{1n}\phi_n),\\
f_2 &= \phi_2 - \frac{\lambda}{n}(K_{21}\phi_1 + \ldots\ldots\ldots + K_{2n}\phi_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_n &= \phi_n - \frac{\lambda}{n}(K_{n1}\phi_1 + \ldots\ldots\ldots + K_{nn}\phi_n),
\end{aligned}
$$

waarin

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right), \quad (p, q = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

$$\phi_p = \phi\left(\frac{p}{n}\right) \quad \text{en} \quad f_p = f\left(\frac{p}{n}\right) \quad (p = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

is.

De oplossingen ϕ_i van de vergelijkingen (3) zijn rationeele breuken met den gemeenschappelijken noemer

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{n}K_{11} & -\frac{\lambda}{n}K_{12} \ldots\ldots\ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{1n} \\ -\frac{\lambda}{n}K_{21} & 1 - \frac{\lambda}{n}K_{22} \ldots\ldots\ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{\lambda}{n}K_{n1} & -\frac{\lambda}{n}K_{n2} \ldots\ldots\ldots & 1 - \frac{\lambda}{n}K_{nn} \end{vmatrix},$$

zoodat men ϕ_i op doelmatige wijze als volgt kan schrijven

$$(4)\qquad \phi_i = \frac{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i_f}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}, \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n)$$

waarin de teller deze beteekenis heeft, dat men de i^e kolom in den determinant $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ vervangen moet door

$$f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, f_n.$$

De vergelijkingen (4), die men voor $\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots\ldots, \phi_n$ vindt, laten zich samenvatten in de betrekking

$$(5)\quad x_1\phi_1 + x_2\phi_2 + \ldots + x_n\phi_n = \frac{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)^1_f}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)} x_1 + \frac{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2_f}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)} x_2 + \ldots + \frac{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)^n_f}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)} x_n,$$

welke identiek in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gelden moet.

Voert men voor het eerste lid van (5) de verkorte notatie (x, φ) in en bedenkt men, dat het tweede lid op het teeken na gelijk is aan den determinant

$$D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{f}\right) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x_n \\ f_1 & 1-\frac{\lambda}{n}K_{11} & -\frac{\lambda}{n}K_{12} & \ldots\ldots\ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{1n} \\ f_2 & -\frac{\lambda}{n}K_{21} & 1-\frac{\lambda}{n}K_{22} & \ldots\ldots\ldots & -\frac{\lambda}{n}K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n & -\frac{\lambda}{n}K_{n1} & -\frac{\lambda}{n}K_{n2} & \ldots\ldots\ldots & 1-\frac{\lambda}{n}K_{nn} \end{vmatrix},$$

dan gaat identiteit (5) over in

$$(x, \varphi) = -\frac{D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{f}\right)}{d\left(\frac{\lambda}{n}\right)}.$$

Stelt men ter bekorting algemeen

$$K\,y_p = K_{p1}\,y_1 + K_{p2}\,y_2 + \ldots\ldots + K_{pn}\,y_n,$$

dan is dus bewezen, dat de vergelijkingen

$$(6)\qquad \begin{aligned} f_1 &= \varphi_1 - \frac{\lambda}{n}K\,\varphi_1 \\ f_2 &= \varphi_2 - \frac{\lambda}{n}K\,\varphi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= \varphi_n - \frac{\lambda}{n}K\,\varphi_n \end{aligned}$$

en de in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ identieke vergelijking

$$(7)\qquad d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x, \varphi) + D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{f}\right) = 0$$

dezelfde betrekkingen tusschen $f_1, f_2, \ldots, f_n$, en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ uitdrukken. Welke getallen dus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ mogen zijn, steeds zal (7) gelden, indien men zich hierin $f_1, f_2, \ldots, f_n$ door (6) bepaald denkt; dat wil zeggen: voor alle waarden van $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ is

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x, \varphi) + D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{\varphi - \frac{\lambda}{n}K\,\varphi}\right) = 0,$$

of

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x, \varphi) + D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{\varphi}\right) - \frac{\lambda}{n}D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{K\,\varphi}\right) \equiv 0.$$

Voor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ andere letters schrijvend, verkrijgt men de identieke betrekking

$$(8)\qquad d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x, y) + D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right) - \frac{\lambda}{n}D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{K\,y}\right) \equiv 0.$$

Identiteit (8) nu is van zeer groot belang; voor $n=\infty$ levert zij, na invoering van geschikte functies voor x en y, eene der meest fundamenteele formules uit de theorie der integraalvergelijkingen.

Om tot deze betrekking te geraken, beginne men $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ naar machten van $\frac{\lambda}{n}$ te ontwikkelen, aldus:

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right)=1-\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}K_{ii}+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{n^2}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{\lambda^3}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{1}{n^3}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij} & K_{ik}\\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jk}\\ K_{ki} & K_{kj} & K_{kk}\end{vmatrix}+\ldots+(-1)^n\lambda^n\frac{1}{n^n}\begin{vmatrix}K_{11}\ldots\ldots K_{1n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ K_{n1}\ldots\ldots K_{nn}\end{vmatrix}$$

Voor $n=\infty$ gaat elk dezer termen over in eene integraal, waardoor men van zelf komt tot de beschouwing van de reeks

$$\delta(\lambda)=1-\lambda\int_0^1 K(s_1,s_1)\,ds_1+\frac{\lambda^2}{2!}\int_0^1\!\!\int_0^1\begin{vmatrix}K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2)\\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2)\end{vmatrix}ds_1\,ds_2$$

$$-\frac{\lambda^3}{3!}\int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1\begin{vmatrix}K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & K(s_1,s_3)\\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & K(s_2,s_3)\\ K(s_3,s_1) & K(s_3,s_2) & K(s_3,s_3)\end{vmatrix}ds_1\,ds_2\,ds_3+\ldots.$$

Hilbert bewijst, dat $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ voor oneindig toenemende n naar $\delta(\lambda)$ convergeert, en wel uniform voor alle waarden van λ, die beneden eene willekeurige eindige grens liggen.

De ontwikkeling naar opklimmende machten van $\frac{\lambda}{n}$ van $\frac{1}{n}D\left(\frac{\lambda}{n},\frac{x}{y}\right)$ convergeert, indien $x(s)$ en $y(s)$ in het interval $(0,1)$ continue functies van s zijn, naar de bestendig convergeerende machtreeks

$$\Delta\left(\lambda,\frac{x}{y}\right)=\Delta_1\binom{x}{y}-\Delta_2\binom{x}{y}\lambda+\Delta_3\binom{x}{y}\lambda^2-+\ldots\ldots\ldots,$$

waarin

$$\Delta_h\binom{x}{y}=\frac{1}{h!}\int_0^1\ldots\ldots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & x(s_1) & x(s_2)\ldots\ldots x(s_h)\\ y(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2)\ldots K(s_1,s_h)\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ y(s_h) & K(s_h,s_1) & K(s_h,s_2)\ldots K(s_h,s_h)\end{vmatrix}ds_1\ldots ds_h$$

is. Nu moet men nog nagaan, wat de derde term in identiteit (8) na deeling door n voor $n=\infty$ wordt. Deze term luidt dan

$$\frac{\lambda}{n^2}D\left(\frac{\lambda}{n},\frac{x}{Ky}\right)$$

of

$$\frac{\lambda}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{\frac{K y}{n}}\right),$$

waarin

$$\frac{1}{n} K y_p = \frac{1}{n} K\left(\frac{p}{n}, \frac{1}{n}\right) y\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} K\left(\frac{p}{n}, \frac{2}{n}\right) y\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + K\left(\frac{p}{n}, \frac{n}{n}\right) y\left(\frac{n}{n}\right)$$

is, hetgeen voor $n = \infty$ overgaat in

$$\int_0^1 K(p, t)\, y(t)\, dt.$$

Zonder verder op het detail in te gaan, is de volgende afleiding begrijpelijk.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda}{n^2} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{K y}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{\lambda}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{\frac{K y}{n}}\right)$$

$$= \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) \right\}_{y(s) = \int_0^1 K(s,t)\, y(t)\, dt}$$

$$= \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) \right\}_{y(s) = K(s,t)} \cdot y(t)\, dt.$$

Wij keeren weer terug naar identiteit (8) of, wat op hetzelfde neerkomt, naar de vergelijking

$$\frac{1}{n} d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x, y) + \frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right) - \frac{\lambda}{n^2} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{K y}\right) = 0.$$

Substitueert men hierin voor x en y respectievelijk de functies $x(s)$ en $y(s)$ en gaat men tot de limiet over voor $n = \infty$, dan is na het voorgaande duidelijk, dat men tot de betrekking

$$(9) \quad \delta(\lambda) \int_0^1 x(s)\, y(s)\, ds + \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) - \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) \right\}_{y = K(s,t)} y(t)\, dt = 0$$

komt. Deze formule is eene identiteit in λ en geldt voor willekeurige functies $x(s)$ en $y(t)$; om nu tot de op blz. 4 aangekondigde betrekking te komen, neemt men voor $x(r)$ de functie $K(s, r)$ en voor $y(r)$ de functie $K(r, t)$, waardoor (9) in de vergelijking

$$\delta(\lambda) \int_0^1 K(s, r)\, K(r, t)\, dr + \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)_{\substack{x = K(s,r) \\ y = K(r,t)}} - \lambda \int_0^1 \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) \right\}_{\substack{x = K(s,r) \\ y = K(s,r)}} \cdot K(r,t)\, dr = 0,$$

overgaat, die door

$$\Delta(\lambda; s, t) = \lambda \left\{ \Delta\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) \right\}_{\substack{x(r) = K(s,r) \\ y(r) = K(r,t)}} - \delta(\lambda)\, K(s, t)$$

en

$$\overline{K(s, t)} = -\frac{\Delta(\lambda; s, t)}{\delta(\lambda)}$$

te stellen, de volgende gedaante aanneemt:

$$(10) \qquad K(s,t) = \overline{K(s,t)} - \lambda \int_0^1 \overline{K(s,r)}\, K(r,t)\, dr.$$

Ware men niet van formule (8), maar van de identiteit

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x,y) + D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right) - \frac{\lambda}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{K\,x}{y}\right) = 0$$

uitgegaan, dan had men op overeenkomstige wijze de volgende betrekking gevonden

$$(11) \qquad K(s,t) = \overline{K(s,t)} - \lambda \int_0^1 K(s,r)\, \overline{K(r,t)}\, dr.$$

Twee functies $K(s,t)$ en $\overline{K(s,t)}$, die dé eigenschappen (10) en (11) bezitten, noemt men reciproke functies.

De nu volgende bewerking doet zien, dat de reciproke functie $\overline{K(s,t)}$ de oplossing levert van de integraalvergelijking

$$(12) \qquad f(s) = \Phi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\, \Phi(t)\, dt.$$

Lost $\Phi(s)$ werkelijk vergelijking (12) op, dan mag men schrijven

$$(13) \qquad \Phi(\tau) = f(\tau) + \lambda \int_0^1 K(\tau,t)\, \Phi(t)\, dt.$$

Vermenigvuldigt men beide leden van (13) met $\overline{K(s,\tau)}$ en integreert daarna naar τ, dan krijgt men, in verband met de betrekkingen (10) en (11)

$$\int_0^1 \overline{K(s,\tau)}\, f(\tau)\, d\tau = \int_0^1 K(s,\tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau,$$

zoodat men voor de oplossing van integraalvergelijking (I2)

$$(14) \qquad \Phi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 \overline{K(s,\tau)}\, f(\tau)\, d\tau$$

vindt.

Om nu, omgekeerd, aan te toonen, dat de verkregen vorm van $\Phi(s)$ werkelijk de integraalvergelijking oplost, heeft men $\Phi(s)$ slechts in (12) te substitueeren. Uit de betrekking

$$\overline{K(s,t)} = -\frac{\Delta(\lambda;\ s,t)}{\delta(\lambda)}$$

kan men dus besluiten, dat voor die waarden van λ, waarvoor

$$\delta(\lambda) \neq 0$$

is, de inhomogene integraalvergelijking ééne oplossing toelaat; vat men (14) als eene integraalvergelijking op, waarin $f(s)$ bepaald moet worden, dan wordt deze vergelijking door (12) bevredigd, waaruit men eveneens tot de eenwaardigheid van de oplossing der inhomogene integraalvergelijking besluiten mag.

Voor die waarden $\lambda^{(h)}$ van λ, waarvoor $\delta(\lambda) = 0$ is (hoofdwaarden, Eigenwerte; characteristic numbers; nombres fondamentaux, valeurs caractéristiques, constantes caractéristiques), hebben de homogene vergelijkingen

$$0 = \Phi^{(h)}(s) - \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s,t)\, \Phi^{(h)}(t)\, dt$$

eene oplossing, die niet identiek nul is, een resultaat, dat men ook bij de algebraïsche vergelijkingen aantreft. Eenige belangrijke eigenschappen, welke HILBERT van deze functies $\varphi^{(h)}(s)$ bewijst, zal ik hier begrijpelijk maken.

Deze eigenschappen leidt HILBERT af, door uit te gaan van de vergelijkingen

$$(15)\qquad \begin{aligned} 0 &= \varphi_1 - \frac{\lambda}{n}(K_{11}\varphi_1 + \dots\dots\dots + K_{1n}\varphi_n),\\ 0 &= \varphi_2 - \frac{\lambda}{n}(K_{21}\varphi_1 + \dots\dots\dots + K_{2n}\varphi_n),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 0 &= \varphi_n - \frac{\lambda}{n}(K_{n1}\varphi_1 + \dots\dots\dots + K_{nn}\varphi_n), \end{aligned}$$

die tot de homogene integraalvergelijking

$$(15a)\qquad 0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

in eene zelfde betrekking staan, als de vergelijkingen (3) tot de inhomogene integraalvergelijking (1).

Weer komt men tot de eigenschappen van de oplossingen der homogene integraalvergelijking door een grensovergang en vindt aldus zekere betrekkingen, waaraan die oplossingen voldoen.

Ondertellen wij, dat $K(s, t)$ symmetrisch is, dan heeft de vergelijking

$$d\left(\frac{\lambda}{n}\right) = 0$$

zeker n reëele wortels

$$\lambda^{(1)},\ \lambda^{(2)},\ \dots\dots,\ \lambda^{(n)}$$

en men weet, dat de vergelijkingen (15) voor die waarden van λ eene oplossing toelaten. Duidt men het oplossingssysteem, behoorende bij $\lambda = \lambda^{(h)}$, door

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(h)},\ \varphi_2 = \varphi_2^{(h)},\ \dots\dots\dots,\ \varphi_n = \varphi_n^{(h)}$$

aan, dan bewijst men gemakkelijk de betrekkingen

$$(16)\qquad \varphi_1^{(h)}.\varphi_1^{(k)} + \varphi_2^{(h)}.\varphi_2^{(k)} + \dots\dots\dots + \varphi_n^{(h)}.\varphi_n^{(k)} = 0, \quad (h \neq k)$$

en aangezien de $\varphi^{(h)}$'s op een constanten factor na bepaald zijn, kan men dezen zoo nemen, dat

$$(17)\qquad \varphi_1^{(h)}.\varphi_1^{(h)} + \varphi_2^{(h)}.\varphi_2^{(h)} + \dots\dots\dots + \varphi_n^{(h)}.\varphi_n^{(h)} = 1$$

wordt. De oplossingen van de algebraïsche vergelijkingen zijn dus *orthogonaal* en *genormeerd*.

Gaat men nu, zonder er zich om te bekommeren, of dit geoorloofd is, in de betrekkingen (16) en (17) tot de limiet voor $n = \infty$ over, dan komen de volgende belangrijke eigenschappen voor den dag:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\int_0^1 \Phi^{(h)}(s)\,.\,\Phi^{(k)}(s)\,ds = 0\ , \\ &\int_0^1 \left(\Phi^{(h)}(s)\right)^2 ds = 1\ . \end{aligned}$$

In deze betrekkingen zijn dan $\Phi^{(h)}(s)$ en $\Phi^{(k)}(s)$ respectievelijk de oplossingen van de homogene integraalvergelijkingen

$$0 = \Phi(s) - \lambda^{(h)} \int_0^1 K(s,t)\,\Phi(t)\,dt$$

en

$$0 = \Phi(s) - \lambda^{(k)} \int_0^1 K(s,t)\,\Phi(t)\,dt\ ,$$

waarin $\lambda^{(h)}$ en $\lambda^{(k)}$ twee verschillende wortels van de vergelijking $\delta(\lambda) = 0$ zijn.

Van de oplossingen van eene homogene integraalvergelijking heeft HILBERT o. m. nog de belangrijke eigenschap bewezen, dat functies, die aan zekere voorwaarden voldoen, zich laten ontwikkelen in reeksen, waarvan de termen gevormd worden door karakteristieke functies, zooals ik oplossingen van eene homogene integraalvergelijking zal noemen (Eigenfunktionen; fonctions fondamentales, fonctions caractéristiques; characteristic functions).

Als uitgangspunt diene de betrekking

$$(19)\qquad K\,x\,y = \frac{(\Phi^{(1)}, x)\,(\Phi^{(1)}, y)}{l^{(1)}\,(\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)})} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(\Phi^{(n)}, x)\,(\Phi^{(n)}, y)}{l^{(n)}\,(\Phi^{(n)}, \Phi^{(n)})},$$

waarin

$$K\,xy = K_{11}\,x_1\,y_1 + K_{12}\,x_1\,y_2 + K_{21}\,x_2\,y_1 + \ldots\ldots + K_{nn}\,x_n\,y_n\,,$$

$$K_{pq} = K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right),$$

$$(\Phi^{(h)}, x) = \Phi_1^{(h)}\,x_1 + \Phi_2^{(h)}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ \Phi_n^{(h)}\,x_n\,,$$

$$(\Phi^{(h)}, \Phi^{(h)}) = \Phi_1^{(h)}\,\Phi_1^{(h)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \Phi_n^{(h)}\,\Phi_n^{(h)},$$

$$l^{(h)} = \frac{\lambda^{(h)}}{n}$$

is en waarin $\Phi_1^{(h)}, \Phi_2^{(h)}, \ldots\ldots, \Phi_n^{(h)}$ en $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots\ldots, \lambda^{(h)}$ dezelfde beteekenis hebben als op blz. 7.

In betrekking (19) substitueert men $x(s)$ voor x en $y(s)$ voor y, zoodat dus

$$x_p = x\left(\frac{p}{n}\right) \quad \text{en} \quad y_p = y\left(\frac{p}{n}\right)$$

wordt; daarna deelt men beide leden door n^2 en gaat, in de onderstelling, dat grensovergang geoorloofd is, tot de limiet over voor $n = \infty$; vergelijking (19) wordt dan

$$(20)\ \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_0^1 \Phi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds \int_0^1 \Phi^{(1)}(s)\,y(s)\,ds +$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{(2)}} \int_0^1 \Phi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds \int_0^1 \Phi^{(2)}(s)\,y(s)\,ds + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Voert men in de laatste betrekking eenige geschikte substituties uit, dan verkrijgt men de gewenschte reeksontwikkeling.

Vooreerst neme men

$$y(t) = \mathrm{K}(r, t),$$

waardoor (20) overgaat in

$$(21)\quad \int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\,\mathrm{K}(r,t)\,x(s)\,ds\,dt = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\int_0^1 \Phi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds \int_0^1 \Phi^{(1)}(s)\,\mathrm{K}(r,s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_0^1 \Phi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds \int_0^1 \Phi^{(2)}(s)\,\mathrm{K}(r,s)\,ds + \ldots\ldots$$

Verder stelle men

$$f(r) = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\,\mathrm{K}(r,t)\,x(s)\,ds\,dt;$$

in verband met de betrekking

$$(22)\qquad \Phi^{(k)}(s) = \lambda^{(k)}\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\,\Phi^{(k)}(t)\,dt$$

is dan

$$\int_0^1 f(r)\,\Phi^{(k)}(r)\,dr = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\,\mathrm{K}(r,t)\,x(s)\,\Phi^{(k)}(r)\,ds\,dt\,dr$$
$$= \frac{1}{\lambda^{(k)}}\int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(s,t)\,\Phi^{(k)}(t)\,x(s)\,ds\,dt$$
$$= \frac{1}{(\lambda^{(k)})^2}\int^1 x(s)\,\Phi^{(k)}(s)\,ds.$$

Vergelijking (21) neemt daardoor de gedaante

$$f(r) = \int_0^1 f(s)\,\Phi^{(1)}(s)\,ds\ \frac{1}{\lambda^{(1)}}\int_0^1 \Phi^{(1)}(s)\,\mathrm{K}(r,s)\,ds +$$
$$+ \int_0^1 f(s)\,\Phi^{(2)}(s)\,ds\,\frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_0^1 \Phi^{(2)}(s)\,\mathrm{K}(r,s)\,ds + \ldots$$

aan, of, weer volgens (22),

$$(23)\quad f(r) = \Phi^{(1)}(r)\int_0^1 f(s)\,\Phi^{(1)}(s)\,ds + \Phi^{(2)}(r)\int_0^1 f(s)\,\Phi^{(2)}(s)\,ds + \ldots\ldots$$

In woorden: eene functie $f(s)$, die zich in den vorm

$$(24)\qquad f(s) = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}(r,t)\,\mathrm{K}(s,t)\,h(r)\,dr\,dt$$

laat schrijven, waarin $h(r)$ eene continue functie van r is, is in eene reeks te ontwikkelen, waarvan de termen, op gelijke wijze als in de reeks van Fourier, gevormd worden door de karakteristieke functies van den kern $\mathrm{K}(s, t)$; derhalve is

$$f(s) = c_1\,\Phi^{(1)}(s) + c_2\,\Phi^{(2)}(s) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left(c_m = \int_0^1 f(s)\,\Phi^{(m)}(s)\,ds\right).$$

De reeks convergeert bovendien absoluut en uniform.

De voorwaarde (24), waaraan eene functie voldoen moet, opdat de

ontwikkelbaarheid te verwachten is, heeft SCHMIDT [1]) weten te vervangen door de lichtere voorwaarde, dat $f(s)$ te schrijven moet zijn in de gedaante

$$\int_0^1 K(s,t)\,p(t)\,dt,$$

waarin $p(t)$ eene willekeurige continue functie beteekent.

Hiermede stap ik van HILBERT's eerste verhandeling af, om er niet meer op terug te komen. Ik heb ze alleen besproken met de bedoeling den lezer reeds vooraf met de methode der oneindig vele veranderlijken bekend te maken.

§ 2. Overzicht van de methode, door Hilbert in zijne vijfde verhandeling gebezigd.

Uit het overzicht in de vorige paragraaf gegeven, blijkt duidelijk het verband, dat er bestaat tusschen de vergelijkingen

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$
$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

en een zeker systeem van oneindig vele lineaire vergelijkingen (zie (3, blz. 2) en (15, blz. 7)). De formules (18, blz. 8) leeren ons bv., dat zekere eigenschappen van de oplossingen der lineaire vergelijkingen (15) tot overeenkomstige eigenschappen van de karakteristieke functies leiden. Nog duidelijker komt dit verband aan het licht, bij de oplossingsmethode der 5e verhandeling. Ook van deze methode zal ik hier een overzicht geven; het weglaten van de details en de bewijzen der gebruikte stellingen, zal den lezer het volgen van den gedachtengang vergemakkelijken.

Om verband te krijgen tusschen de integraalvergelijking en de lineaire vergelijkingen met oneindig vele onbekenden, diene een systeem van oneindig vele continue functies

$$\Phi_1(s),\ \Phi_2(s),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

die in het interval (a, b)

1e *orthogonaal en genormeerd* zijn, d. i. aan de betrekkingen

$$(1)\qquad \int_a^b \Phi_p(s)\ \Phi_q(s)\,ds = 0, \qquad (p \neq q)$$
$$\int_a^b \Big(\Phi_p(s)\Big)^2 ds = 1$$

voldoen;

2e een *volledig systeem* vormen; d. i. voor elk paar continue functies $u(s)$ en $v(s)$ geldt de betrekking

$$(2)\qquad \int_a^b u(s)\,v(s)\,ds = \int_a^b u(s)\,\Phi_1(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\Phi_1(s)\,ds + $$
$$+ \int_a^b u(s)\,\Phi_2(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\Phi_2(s)\,ds + \ldots\ldots$$

1) E. SCHMIDT, Math. Ann. 68 (1907).

Men noemt zulk een systeem van functies *een volledig systeem van orthogonale functies* voor het interval (a, b).

De integralen

$$\int_a^b u(s)\,\Phi_1(s)\,ds\,, \int_a^b u(s)\,\Phi_2(s)\,ds\,, \ldots\ldots\,,$$

die ik kortweg door u_1, u_2, ... zal aanduiden, heeten de *Fouriersche coëfficiënten* van de functie $u(s)$ met betrekking tot het volledige, orthogonale stelsel $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ...

Tengevolge van deze notatie gaat betrekking (2) over in

$$(3) \qquad \int_a^b u(s)\,v(s)\,ds = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots\ldots$$

Dat men inderdaad zulk een systeem van functies $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... kan verkrijgen, zal ik naderhand aantoonen.

Zij ditmaal gegeven de integraalvergelijking zonder parameter

$$(4) \qquad f(s) = \phi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\phi(t)\,dt\,,$$

waarin de verschillende functies de bekende rol vervullen, dan geraakt men tot het stelsel algebraïsche vergelijkingen, die de oplossing van (4) zullen leveren, door de volgende grootheden te definieeren:

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\Phi_q(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt\,,$$

en met deze grootheden als coëfficiënten de vergelijkingen

$$(5) \qquad \begin{array}{l} (1 + k_{11})\,x_1 + k_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = f_1\,, \\ k_{21}\,x_1 + (1 + k_{22})\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = f_2\,, \\ k_{31}\,x_1 + k_{32}\,x_2 + (1 + k_{33})\,x_3 + \ldots = f_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

te vormen, waarin

$$f_p = \int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds$$

is.

Laten $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... de oplossingen dezer oneindig vele vergelijkingen zijn, dan zal ik aantoonen, dat de functie

$$(6) \qquad \phi(s) = f(s) - g(s)\,,$$

waarin

$$(7) \qquad g(s) = \alpha_1\,k_1(s) + \alpha_2\,k_2(s) + \ldots\ldots$$

en

$$k_q(s) = \int_a^b K(s,t)\,\Phi_q(t)\,dt$$

is, aan integraalvergelijking (4) voldoet.

Substitueer te dien einde (6) in (4); het gevolg dezer substitutie is, dat men de betrekking

$$(8) \qquad g(s) = \int_a^b K(s,t)\,\{f(t) - g(t)\}\,dt$$

moet bewijzen.

Stelt men in (3)

$$u(t) = \mathrm{K}(s, t) \quad \text{en} \quad v(t) = f(t) - g(t),$$

zoodat men

$$\int_a^b \mathrm{K}(s, t)\,\{f(t) - g(t)\}\,dt = k_1(s)(f_1 - g_1) + k_2(s)(f_2 - g_2) + \ldots$$

verkrijgt, dan gaat de te bewijzen betrekking (8) over in

$$g(s) = k_1(s)(f_1 - g_1) + k_2(s)(f_2 - g_2) + \ldots\ldots$$

of wegens de definitie van $g(s)$ in

$$\alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \ldots\ldots = k_1(s)(f_1 - g_1) + k_2(s)(f_2 - g_2) + \ldots\ldots$$

Deze betrekking geldt, daar

$$\alpha_p = f_p - g_p$$

is, omdat wegens (7)

$$g_p = \int_a^b \Phi_p(s)\,g(s)\,ds = \int_a^b \Phi_p(s)\Big(\alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \ldots\ldots\Big)$$
$$= \alpha_1 k_{p1} + \alpha_2 k_{p2} + \alpha_3 k_{p3} + \ldots\ldots$$

is.

In geval vergelijking

$$(4) \qquad f(s) = \phi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\,\phi(t)\,dt$$

geene oplossing heeft, vindt men de oplossing der homogene integraalvergelijking door de overeenkomstige lineaire vergelijkingen te beschouwen; dit zijn dan de vergelijkingen (5), waarin

$$f_1 = f_2 = f_3 = \ldots\ldots\ldots = 0$$

is.

Zoo deze homogene vergelijkingen eene oplossing hebben, kunnen er nog wel waarden van f gevonden worden, waarvoor de vergelijkingen (5) oplosbaar zijn. Wij zullen later zien (Hoofdstuk IV, § 1), dat de aard en het aantal der voorwaarden, waaraan in dat geval $f_1, f_2, \ldots\ldots$ moeten voldoen, overeenstemmen met den aard en het aantal voorwaarden, waaraan $f(s)$ in vergelijking (4) moet voldoen, opdat deze vergelijking eene oplossing toelate in het geval, dat de homogene integraalvergelijking

$$0 = \phi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\,\phi(t)\,dt$$

oplosbaar is.

Ik zal nu dit overzicht besluiten met eene korte bespreking van de homogene integraalvergelijking

$$(9) \qquad 0 = \phi(s) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\,\phi(t)\,dt,$$

waarin $\mathrm{K}(s, t)$ bepaaldelijk symmetrisch ondersteld wordt.

Als uitgangspunt diene weer het volledige orthogonale systeem $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s), \ldots\ldots$, waarmee men, evenals in de vorige paragraaf, de volgende grootheden vormt:

$$k_q(s) = \int_a^b K(s,t)\,\Phi_q(t)\,dt,$$

(10) $$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt,$$

$$f_p = \int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds.$$

Daar $K(s,t)$ symmetrisch is, is bovendien

$$k_{pq} = k_{qp}.$$

Het zijn vooral de eigenschappen van den quadratischen vorm

$$K(x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}\,x_p\,x_q,$$

die tot zeer belangrijke uitkomsten voor de theorie der integraalvergelijkingen leiden. Zoo kan men bewijzen, dat er een oneindig systeem van lineaire vormen

$$L_1(x) = l_{11}\,x_1 + l_{12}\,x_2 + \dots\dots\dots,$$
$$L_2(x) = l_{21}\,x_1 + l_{22}\,x_2 + \dots\dots\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

te vinden is, dat de eigenschap bezit, dat $K(x)$ als volgt is uit te drukken in eene som van kwadraten dezer lineaire vormen:

(11) $$K(x) = \varkappa_1\Big(L_1(x)\Big)^2 + \varkappa_2\Big(L_2(x)\Big)^2 + \dots\dots\dots$$

Deze lineaire vormen zijn bovendien orthogonaal (en genormeerd):

$$\sum_{r=1}^{\infty} l_{pr}\,l_{qr} = 0 \qquad (p \neq q)$$

en

$$\sum_{r=1}^{\infty} l_{pr}^2 = 1.$$

In het kort schrijft men deze eigenschappen als volgt:

(12) $$L_p(\cdot)\,L_q(\cdot) = 0, \qquad (p \neq q)$$
$$L_p(\cdot)\,L_p(\cdot) = 1.$$

De eigenschappen (11) en (12) gecombineerd leiden direkt tot de formule

(13) $$K(x,\cdot)\,L_p(\cdot) = \varkappa_p\,L_p(x),$$

waarin $K(x,\cdot)\,L_p(\cdot)$ beteekent: vervang elke x_r in $L_p(x)$, waarin r loopt van 1 tot ∞, door den coëfficiënt van x_r in $K(x)$.

Wanneer men de coëfficiënten van x_q in de beide leden van gelijkheid (13) met elkander vergelijkt, vindt men

(14) $$l_{p1}\,k_{q1} + l_{p2}\,k_{q2} + \dots\dots\dots = \varkappa_p\,l_{pq}.$$

Wij hebben nu de noodige formules bij elkaar, om zekere functies op te bouwen, die eene belangrijke rol in de theorie vervullen; het zijn de functies, die men als volgt definieert:

$$(15)\quad \Phi_p(s) = \frac{1}{\varkappa_p} L_p\Big(k(s)\Big) = \frac{1}{\varkappa_p}\Big(l_{p1}\,k_1(s) + l_{p2}\,k_2(s) + \ldots\ldots\Big).$$

Allereerst merke men op, dat

$$\int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = \frac{1}{\varkappa_p}\int_a^b L_p\Big(k(s)\Big)\,\Phi_q(s)\,ds =$$
$$= \frac{1}{\varkappa_p}\Big(l_{p1}\,k_{q1} + l_{p2}\,k_{q2} + \ldots\ldots\ldots\Big)$$

en dus in verband met (14) gelijk aan l_{pq} is.

Door nu in (3)

$$u(s) = \Phi_p(s) \text{ en } v(s) = \Phi_q(s)$$

te nemen, krijgt men in verband met (12) de volgende betrekkingen

$$(16)\quad \int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = l_{p1}\,l_{q1} + l_{p2}\,l_{q2} + \ldots\ldots = L_p(\cdot)\,L_q(\cdot) = 0$$

en

$$(17)\quad \int_a^b \Big(\Phi_p(s)\Big)^2 ds = l_{p1}^2 + l_{p2}^2 + \ldots\ldots\ldots = L_p(\cdot)\,L_p(\cdot) = 1.$$

De aldus gedefinieerde functies $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... zijn dus orthogonaal en genormeerd; bovendien voldoen zij bij geschikte keuze van den parameter λ aan de homogene integraalvergelijking

$$\Phi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\,\Phi(t)\,dt.$$

Om dit in te zien, neme men in (3)

$$u(t) = K(s, t),\quad v(t) = \Phi_p(t)$$

en t als integratieveranderlijke; dan komt er

$$\int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(t)\,dt = k_1(s)\,l_{p1} + k_2(s)\,l_{p2} + \ldots\ldots$$

of wegens (15)

$$\int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(t)\,dt = \varkappa_p\,\Phi_p(s).$$

Stelt men, wat gebruikelijk is,

$$\lambda_p = \frac{1}{\varkappa_p},$$

dan geldt dus de betrekking

$$\Phi_p(s) = \lambda_p \int_a^b K(s, t)\,\Phi_p(t)\,dt.$$

De homogene integraalvergelijking (9) heeft dus voor $\lambda = \lambda_p$ eene oplossing $\Phi(s) = \Phi_p(s)$, die wegens (17) niet identiek nul kan zijn. Gaat men iets verder op deze theorie in, dan komt men tot de ontwikkelbaarheid van willekeurige functies in eene reeks, die voortloopt naar de orthogonale functies $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ...; hierop kom ik in hoofdstuk IV, § 2 terug.

Voldoende moge uit dit overzicht gebleken zijn, dat eene uitvoerige bespreking van de eigenschappen der lineaire en kwadratische vormen wordt vereischt, om de verschillende bewerkingen, die in de vorige paragrafen ter sprake zijn gekomen, te rechtvaardigen.

Voor zoover dit de methode betreft, die in § 2 behandeld is (5e verhandeling van HILBERT), zal ik die theorie in de volgende bladzijden ontwikkelen.

Hoofdstuk II bevat eene reeks van hulpstellingen, hoofdzakelijk over lineaire en quadratische vormen, die in de hoofdstukken III en IV toegepast zullen worden.

HOOFDSTUK II.

§ 1. Theorie der lineaire, bilineaire en quadratische vormen van oneindig vele veranderlijken.

Bij de afleidingen [1]), die hier volgen zullen, wordt gebruik gemaakt van de twee volgende stellingen:

I. *Wanneer* $u_1, u_2, .., u_n$ *en* $v_1, v_2, .., v_n$ *willekeurige grootheden zijn, dan geldt steeds de ongelijkheid*

$$(u, v)_n^2 \leqq (u, u)_n (v, v)_n,$$

waarin $(u, v)_n$ de verkorte schrijfwijze is voor $u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$.

II. *Wanneer* $u_1, u_2, .., u_n$ *zekere grootheden zijn, die voor alle waarden van* $v_1, v_2, .., v_n$ *aan de ongelijkheid*

$$(1) \qquad | (u, v)_n | \leqq M \sqrt{(v, v)_n}$$

voldoen, waarin M *een van n onafhankelijk positief getal is, dan is steeds*

$$(u, u)_n \leqq M^2.$$

Het bewijs van de eerste stelling volgt direkt uit de beschouwing van den in λ en μ positief definieten quadratischen vorm

$$\sum_{p=1}^{p=n} (\lambda u_p + \mu v_p)^2.$$

Deze vorm is namelijk ook als volgt te schrijven

$$\lambda^2 (u, u)_n + 2 \lambda \mu (u, v)_n + \mu^2 (v, v)_n.$$

Het in λ en μ positief definiet zijn van den laatsten vorm brengt de betrekking

$$(u, v)_n^2 \leqq (u, u)_n (v, v)_n$$

mee. Het bewijs van de tweede stelling vindt men door te bedenken, dat de betrekking (1) ook moet gelden voor $v_1 = u_1, v_2 = u_2, \ldots, u_n = v_n$, zoodat men heeft

$$(u, u)_n \leqq M \sqrt{(u, u)_n}$$

of

$$(u, u)_n \leqq M^2.$$

---

1) Bij het bewerken dezer paragraaf is behalve van HILBERT's vierde verhandeling ook gebruik gemaakt van het stuk van E. HELLINGER en O. TOEPLITZ in de Math. Annalen, deel 69 (1910), getiteld „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen".

De twee bewezen stellingen zullen in de eerste plaats dienen om de voorwaarden te vinden, waaronder lineaire en bilineaire vormen van oneindig vele veranderlijken convergeeren. De eerste stelling van dien aard luidt als volgt:

III. *Is de lineaire vorm*

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x + l_3 x_3 + \dots\dots\dots\dots$$

begrensd, d. i., is er eene grootheid M *zoo, dat voor alle waarden van n*

(2) $$| l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots\dots + l_n x_n | \leqq M \sqrt{(x, x)_n}$$

is, voor alle waarden van x, dan convergeert (l, l); en wanneer omgekeerd (l, l) convergeert, dan is L (x) *begrensd.*

Uit (2) volgt namelijk in verband met II, dat

$$(l, l) \leqq M^2$$

is, hetgeen uitdrukt, dat (l, l) begrensd is, wat de convergentie van (l, l) insluit. Dat het omgekeerde van de stelling geldt, volgt in verband met I uit de ongelijkheid

$$| l_1 x_1 + \dots\dots\dots + l_n x_n | \leqq \sqrt{(l, l)_n} \sqrt{(x, x)_n},$$

waarvoor men wegens de convergentie van (l, l)

$$| l_1 x_1 + \dots\dots\dots + l_n x_n | \leqq M \sqrt{(x, x)_n}$$

mag schrijven. Deze laatste ongelijkheid drukt bij definitie uit, dat L (x) begrensd is, wat te bewijzen was.

IV. *Als* L (x) *begrensd is, convergeert* L (x), *d. w. z. bestaat* $\lim\limits_{n=\infty} L_n(x)$, *indien* $\lim\limits_{n=\infty} (x, x)$ *bestaat.*

Immers

$$| l_n x_n | + \dots + | l_{n+m} x_{n+m} | \leqq \sqrt{l_n^2 + \dots + l_{n+m}^2} \sqrt{x_n^2 + \dots + x_{n+m}^2}$$

en voor lim $n = \infty$ convergeeren beide wortelvormen naar nul onafhankelijk van m.

Daar dus

$$| l_1 x_1 | + | l_2 x_2 | + \dots\dots\dots\dots$$

convergeert, is de convergentie van L (x) absoluut.

De verkregen resultaten zullen aangewend worden bij het onderzoek der lineaire en kwadratische vormen, waartoe ik nu zal overgaan.

V. *Indien een kwadratische vorm* $A(x, x) = \sum\limits_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p x_q$ *begrensd is, d. i., indien voor alle waarden van n en x*

$$| A_n(x, x) | \leqq M (x, x)_n$$

is, is de bijbehoorende bilineaire vorm A (x, y) *evenzeer begrensd, d. w. z. is* $| A_n(x, y) |$ *voor alle n gelijk aan of kleiner dan* $N \sqrt{(x, x)_n} \sqrt{(y, y)_n}$ *en wel kan men* $N = M$ *nemen.*

Immers uit

$$A_n(x+y,\ x+y) = A_n(x,x) + 2\,A_n(x,y) + A_n(y,y)$$

en

$$A_n(x-y, x-y) = A_n(x,x) - 2\,A_n(x,y) + A_n(y,y)$$

volgt

$$\begin{aligned} |\,A_n(x,y)\,| &\leqq \tfrac{1}{4}\,|\,A_n(x+y, x+y)\,| + \tfrac{1}{4}\,|\,A_n(x-y, x-y)\,| \\ &\leqq \tfrac{1}{4}\,M\,\{(x+y, x+y)_n + (x-y, x-y)_n\} \\ &\leqq \tfrac{1}{2}\,M\,\{(x,x)_n + (y,y)_n\}. \end{aligned}$$

Voor

$$(x,x) \leqq 1 \quad \text{en} \quad (y,y) \leqq 1$$

is dus

$$|\,A_n(x,y)\,| \leqq M;$$

derhalve is voor alle x en y

$$|\,A_n(x,y)\,| \leqq M\,\sqrt{(x,x)_n}\,\sqrt{(y,y)_n},$$

waarmee de stelling bewezen is.

VI. *Is*

$$A(x,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

begrensd, dan convergeert zoowel

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}^2 \quad \text{als} \quad \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}^2$$

en zullen dus

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_q \quad \text{en} \quad \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, y_q$$

beide absoluut convergeeren, wanneer (x,x) *en* (y,y) *respectievelijk begrensd zijn.*

Om deze eigenschappen te bewijzen, stelt men in $A(x,y)$

$$y_1 = y_2 = \ldots\ldots\ldots = y_{q-1} = y_{q+1} = \ldots\ldots\ldots = 0$$

en

$$y_q = 1.$$

Aangezien $A(x,y)$ begrensd is, heeft men dan

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{pq}\, x_p\right| \leqq M\sqrt{(x,x)_n};$$

$\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p$ is dus begrensd, zoodat volgens III $\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}^2$ convergeert; volgens IV convergeert $\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p$ zelf absoluut.

VII. *Is* A (x, y) *begrensd, dan convergeeren*

$$\sum_{p=1}^{\infty} x_p \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, y_q \quad \text{en} \quad \sum_{q=1}^{\infty} y_q \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\,,$$

indien (x, x) *en* (y, y) *convergeeren.*

Daar

$$\sum_{p=n+1}^{n+m} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

uit A (x, y) ontstaat, voor $x_1 = \ldots\ldots = x_n = 0$ en $x_{n+m+1} = \ldots\ldots = 0$, is, indien A (x, y) begrensd is,

$$\left| \sum_{p=n+1}^{n+m} x_p \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, y_q \right| \leqq \mathrm{M} \sqrt{(y, y)} \; \sqrt{x_{n+1}^2 + \ldots\ldots + x_{n+m}^2}.$$

Deze som wordt dus onafhankelijk van m nul voor $\lim n = \infty$, indien (x, x) convergeert; waarmee de juistheid dezer stelling is aangetoond.

VIII. *Indien* A (x, y), (x, x) *en* (y, y) *begrensd zijn, is*

$$\lim_{m, n = \infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq}\, x_p\, y_q \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q.$$

Want eenerzijds is

$$\left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q - \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq}\, x_p\, y_q \right| = \left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=m+1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q \right| \leqq$$
$$\leqq \mathrm{M} \sqrt{(x, x)} \; \sqrt{y_{m+1}^2 + \ldots\ldots},$$

waaruit volgt, dat men m zoo groot kiezen, dat onafhankelijk van n

$$\left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q - \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq}\, x_p\, y_q \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

is. Aan den anderen kant kan men wegens VII n zoo groot nemen, dat

$$\left| \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_q\, y_q - \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wordt. Bijgevolg kan men, bij gegeven positieve ε, m en n zoo groot kiezen, dat

$$\left| \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq}\, x_p\, y_q - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q \right| < \varepsilon$$

en dus

$$\lim_{m, n = \infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq}\, x_p\, y_q \right) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

wordt.

Stelt men

$$A_n(x, y) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{pq}\, x_p\, y_q,$$

dan wordt in het bijzonder

$$\lim_{n=\infty} A_n(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q.$$

Daar men eveneens kan bewijzen, dat

$$\lim_{n=\infty} A_n(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

is, geldt de betrekking.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q.$$

De drie gelijke limieten worden door $A(x, y)$ aangeduid.

IX. *Zijn* $A(x, y)$ *en* $B(x, y)$ *twee begrensde bilineaire vormen, dan convergeert*

$$c_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{pr}\, b_{rq}$$

voor alle p *en* q.

Deze eigenschap is een onmiddellijk gevolg van VI en IV. De bilineaire vorm

$$C(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} c_{pq}\, x_p\, y_q$$

heet de samenstelling van A en B.

Men schrijft

$$C(x, y) = A(x, \cdot)\; B(\cdot, y).$$

X. *Indien* $A(x, y)$ *begrensd is, convergeert voor elke waarde van* n *de reeks*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pq}\, x_p \right)^2.$$

Daar, indien $A(x, y)$ begrensd is,

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} a_{pq}\, x_p\, y_q$$

absoluut kleiner dan $M \sqrt{(x, x)_n}\, \sqrt{(y, y)_m}$ is, is de in y lineaire vorm

$$\sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{pq}\, x_p \right) y_q$$

begrensd en absoluut $\leq M \sqrt{(x, x)_n}\, \sqrt{(y, y)_m}$.

Volgens III convergeert dus

$$\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{pq}\, x_p\right)^2$$

en is wegens II $\leqq M^2 (x, x)_n$.

XI. *Zijn* A (x, y) *en* B (x, y) *begrensd, dan is ook* C (x, y) *begrensd.*
Wegens IX en I is namelijk

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} c_{pq}\, x_p\, y_q\right| = \left|\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{p\alpha}\, x_p\right)\left(\sum_{q=1}^{m} b_{\alpha q}\, y_q\right)\right| \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} a_{p\alpha}\, x_p\right)^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{m} b_{\alpha q}\, y_q\right)^2}$$

en dus wegens X

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} c_{pq}\, x_p\, y_q\right| \leqq M N \sqrt{(x, x)_n}\ \sqrt{(y, y)_m},$$

waarin M en N de grenzen van A (x, y) en B (x, y) voor $(x, x) \leqq 1$ en $(y, y) \leqq 1$ zijn; C (x, y) is dus begrensd.

XII. *De samenstelling* C (x, y), *gevormd uit de bilineaire vormen* A (x, y) *en* B (x, y), *laat zich als volgt schrijven:*

$$C(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y^q\right)\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p\right).$$

Uit het feit, dat C $(x\, y)$ begrensd is, volgt namelijk

$$C(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p\left(\sum_{q=1}^{\infty} y_q\, c_{pq}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \left\{\sum_{q=1}^{\infty} y_q\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, b_{\alpha q}\right)\right\}.$$

Wat tusschen $\{\,\}$ staat is B (x, y), waarin x_α door $a_{p\alpha}$ is vervangen; volgens VIII mag men daarvoor dus ook

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y_q\right)$$

schrijven, zoodat

$$C(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p\left\{\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y_q\right)\right\}$$

wordt. Dit is A (x, y), waarin $\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y_q$ voor y_α genomen is, en men mag er dus volgens VIII

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y_q\right)\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p\right)$$

of ook

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p\right)\left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y_q\right)$$

voor schrijven.

XIII. *Ook is*

$$C(x,y) = \lim_{m=\infty} C_m(x,y) = \lim_{m=\infty} \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} x_p\, y_q \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, b_{\alpha q}\right) =$$
$$= \lim_{m=\infty}\lim_{n=\infty}\Big[A_n(x,\cdot),\, B_n(\cdot,y)\Big]_m .$$

In deze betrekking heeft het laatste lid de volgende beteekenis: men vormt de samenstelling van $A_n(x,y)$ en $B_n(x,y)$ en in deze samenstelling neemt men $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ en $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_n$ gelijk aan nul. In den aldus verkregen vorm gaat men ten slotte tot den limiet over voor $n=\infty$ en daarna voor $m=\infty$. Na hetgeen vooraf gegaan is, behoeft stelling XIII geen bewijs.

Heeft men drie begrensde bilineaire vormen $A(x,y)$, $B(x,y)$ en $C(x,y)$, dan kan men eerst $A(x,y)$ met $B(x,y)$ samenstellen; aangezien de vorm, dien men verkrijgt, weer begrensd is, kan men daarna dezen vorm met $C(x,y)$ samenstellen, welke bewerkingen men aldus aangeeft:

$$\{A(x,\cdot)\ B(\cdot,*)\}\ C(*,y).$$

Vormt men eerst de samenstelling van $B(x,y)$ met $C(x,y)$ en stelt men daarna den verkregen vorm met $A(x,y)$ samen, zoo geeft men deze bewerking in overeenstemming met bovenstaande notatie als volgt aan:

$$A(x,\cdot)\ \{B(\cdot,*)\ C(*,y)\}.$$

In de volgende stelling zal aangetoond worden, dat beide uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn.

XIV. Zijn $A(x,y)$, $B(x,y)$ en $C(x,y)$ drie begrensde bilineaire vormen, dan is

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, b_{\alpha\beta}\, c_{\beta q}$$

de vorm $B(x,y)$, waarin x_α door $a_{p\alpha}$ en y_β door $c_{\beta q}$ is vervangen. De vorm convergeert dus volgens VI en VIII en kan mitsdien zoowel door

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\left(\sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\alpha\beta}\, c_{\beta q}\right) \text{ als door } \sum_{\beta=1}^{\infty} c_{\beta q}\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, b_{\alpha\beta}\right) \text{ worden voorgesteld.}$$

De beide laatste uitdrukkingen stellen achtereenvolgens de coëfficiënten van $x_p\, y_q$ in

$$A(x,\cdot)\ \{B(\cdot,*)\ C(*,y)\} \text{ en } \{A(x,\cdot)\ B(\cdot,*)\}\ C(*,y)$$

voor, zoodat deze vormen gelijk zijn en men dus de accoladen mag weglaten; derhalve mag men schrijven

$$A(x,\cdot)\ B(\cdot,*)\ C(*,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, b_{\alpha\beta}\, c_{\beta q}\right) x_p\, y_q.$$

Uit de wijze, waarop in IX de samenstelling van twee bilineaire vormen $A(x,y)$ en $B(x,y)$ is gedefinieerd, ziet men duidelijk, dat voor het geval $A(x,y)$ en $B(x,y)$ niet uit een oneindig aantal termen bestaan, deze bewerking hier op neer komt, dat men y_r in $A(x,y)$ door den coefficient van x_r in $B(x,y)$ vervangt; in stelling XV zal ik aantoonen, dat deze eigenschap door gaat voor bilineaire vormen met oneindig vele veranderlijken, mits deze vormen begrensd zijn.

XV. *Vervangt men in den begrensden vorm* $B(x,y) = \sum_{\alpha\beta=1}^{\infty} b_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$ *alle* x_α *door* $\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p$, *waarin de* $a_{p\alpha}$*'s bij een begrensden vorm* $A(x,y)$ *behooren, dan convergeert het resultaat, daar* $\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p\right)^2$ *blijkens* XII *convergent is.*

Volgens VIII mag men er dus ook

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p\right)\left(\sum_{\beta=1}^{\infty} b_{\alpha\beta}\, y_\beta\right)$$

voor schrijven, hetgeen volgens XII $A(x,\cdot)\ B(\cdot,y)$ is; dus $A(x,\cdot)\ B(\cdot,y)$ is $B(x,y)$, waarin x_α door $\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p$ is vervangen of ook $A(x,y)$, waarin men y_α door $\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q}\, y_q$ vervangen heeft.

Evenzoo is $A(x,\cdot)\ B(\cdot,*)\ C(*,y)$ niets dan $A(x,\cdot)\ B(\cdot,y)$, waarin y_β door $\sum_{q=1}^{\infty} c_{\beta q}\, y_q$ is vervangen, d.i. dus $B(x,y)$, waarin x_α door $\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha}\, x_p$ en tevens y_β door $\sum_{q=1}^{\infty} c_{\beta q}\, y_q$ vervangen is.

XVI. *Al het voorgaande geldt ook voor begrensde kwadratische vormen.*

Want volgens V is de bijbehoorende bilineaire vorm ook begrensd; voor deze gelden alle stellingen en men verkrijgt daaruit de overeenkomstige stellingen voor den kwadratischen vorm door overal $y = x$ te stellen.

Is $A(x,y)$ begrensd, dan schrijve men $A(x,\cdot)\ A(\cdot,y) = A\,A(x,y) = A^2(x,y)$, $A\,A^2(x,y) = A\,A\,A(x,y) = A^3(x,y)$, enz.; evenzoo voor kwadratische vormen. Men heeft nu de volgende eigenschap:

XVII. *Is* $A(x,x)$ *definiet, d. i. heeft voor alle* x *de vorm* $A(x,x)$ *hetzelfde teeken, dan is dit ook met* $A^3(x,x)$, $A^5(x,x)$, *enz. het geval.*

Immers $A^3(x,x)$ is volgens XV $A(x,x)$, waarin x_α door $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p$ is vervangen; evenzoo is $A^5(x,x)$ gelijk aan $A^3(x,x)$, waarin x_α door $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p$ vervangen is, enz.

XVIII. *Indien* $\sum\limits_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^2$ *convergeert, dan is de bilineaire vorm* $A(x,y)$ *begrensd.*

Aangezien namelijk $\sum\limits_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^2$ convergeert, is ook $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{pq}^2$ convergent en volgens III en IV dus ook de lineaire vorm $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{pq} y_q$; men heeft voorts volgens I zoowel

$$\left(\sum_{q=1}^{n} a_{pq}\, y_q\right)^2 \leqq \left(\sum_{q=1}^{n} a_{pq}^2\right) (y,y)_n$$

als

$$\left|\sum_{p=1}^{n} x_p \sum_{q=1}^{n} a_{pq}\, y_q\right| \leqq \sqrt{(x,x)_n}\,.\,\sqrt{(y,y)_n}\,\sqrt{\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^2},$$

waaruit volgt, dat $A(x,y)$ begrensd is en voor $(x,x)=1$ en $(y,y)=1$ gelijk of kleiner is dan $\sqrt{\sum\limits_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^2}$.

Definitie. Zij o_{pq} een systeem van constanten zoo, dat

$$\sum_{p=1}^{\infty} o_{pq}^2 = 1, \quad \sum_{r=1}^{\infty} o_{pr}\, o_{qr} = 0, \quad \sum_{q=1}^{\infty} o_{pq}^2 = 1, \quad \sum_{r=1}^{\infty} o_{rp}\, o_{rq} = 0.$$

De bilineaire vorm $O(x,y) = \sum\limits_{p,q=1}^{\infty} o_{pq}\, x_p\, y_q$ heet dan *orthogonaal.*

Zooals later blijken zal, vervullen deze orthogonale bilineaire vormen eene belangrijke rol in deze theorie.

Eenige eigenschappen der orthogonale bilineaire vormen zal ik nu afleiden.

XIX. *Een orthogonale bilineaire vorm is begrensd.*

Deze eigenschap toont men als volgt aan:

$$\sum_{q=1}^{n} y_q^2 = \sum_{q,r=1}^{n} y_q\, y_r \sum_{p=1}^{\infty} o_{pq}\, o_{pr} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q,r=1}^{n} o_{pq}\, o_{pr}\, y_q\, y_r = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{n} o_{pq}\, y_q\right)^2$$

en dus

$$\sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} o_{pq}\, y_q \right)^2 \leqq (y, y)_n.$$

Wegens I is dus zeker

$$\left| O_n(x, y) \right| = \left| \sum_{p=1}^{n} x_p \left(\sum_{q=1}^{n} o_{pq}\, y_q \right) \right| \leqq \sqrt{(y, y)_n}\ \sqrt{(x, x)_n}$$

zoodat $O(x, y)$ begrensd is.

Noemt men den vorm $\bar{A}(x, y)$, die ontstaat, door in een bilineairen vorm $A(x, y)$ overal a_{pq} door a_{qp} te vervangen, den getransponeerden vorm van $A(x, y)$, dan is

$$A(x, \cdot)\ \bar{A}(\cdot, y)$$

volgens XV $A(x, y)$, waarin y_α door $\sum\limits_{q=1}^{\infty} a_{q\alpha}\, y_q$ is vervangen, d. i. door den coëfficiënt van x_α in $A(y, x)$. Dit drukt men doelmatig uit, door te schrijven

$$A(x, \cdot)\, \bar{A}(\cdot, y) = A(x\ \cdot)\, A(y, \cdot) = \bar{A}(\cdot, x)\, \bar{A}(\cdot, y).$$

Een orthogonale bilineaire vorm bezit nu de volgende eigenschap:

XX. $$O(x, \cdot)\, O(y, \cdot) = O(x, \cdot)\ \bar{O}(\cdot, y) = (x, y).$$

Volgens XII is

$$O(x, \cdot)\, \bar{O}(\cdot, x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} o_{p\alpha}\, x_p \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} o_{q\alpha}\, y_q \right).$$

In verband met de orthogonaliteitseigenschappen der coëfficiënten o_{pq} mag men hiervoor (x, y) schrijven; in het bijzonder wordt

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} o_{p\alpha}\, x_p \right)^2 = (x, x).$$

Wanneer men in de redeneering $O(x, y)$ door $\bar{O}(x, y)$ vervangt, vindt men eveneens

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} o_{\alpha p}\, x_p \right)^2 = (x, x).$$

Definitie. Is o_{pq} een orthogonaal systeem van coëfficiënten, dan noemt men

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sum_{q=1}^{\infty} o_{1q}\, x'_q \\ x_2 &= \sum_{q=1}^{\infty} o_{2q}\, x'_q \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{en} \quad \left.\begin{aligned} x'_1 &= \sum_{p=1}^{\infty} o_{p1}\, x_p \\ x'_2 &= \sum_{p=1}^{\infty} o_{p2}\, x_p \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

twee orthogonale substituties. In de eerste is het convergeeren van (x', x'), in de tweede, dat van (x, x) ondersteld. Uit XX volgt, dat dan ook in de eerste substitutie (x, x) en in de tweede (x', x') convergeert.

XXI. *Beide substituties zijn elkaars omgekeerde.*
Uit de eerste substitutie volgt bijv.:

$$\sum_{p=1}^{\infty} o_{pr}\, x_p = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} o_{pr}\, o_{pq}\, x'_q.$$

Het tweede lid van de laatste vergelijking is $O(\cdot, y)\ O(\cdot, x')$, geschreven in den vorm

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{\infty} o_{pr}\, y_r \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} o_{pq}\, x'_q \right)$$

(zie XX), en waarin $y_r = 1$ en de overige y's nul genomen zijn. Doet men dit echter in $O(\cdot\ y)\ O(\cdot, x') = (y, x')$ dan komt er x'_r.

XXII. *Eene orthogonale substitutie is op te vatten als eene samenstelling met den vorm* $O(x, y)$.

Uit het voorgaande betoog ziet men reeds, dat men eene orthogonale substitutie ook op kan vatten als eene samenstelling met den vorm $O(x, y)$. Ten overvloede moge dit nog blijken, door den lineairen vorm $L(x)$ samen te stellen met $O(x, y)$. Aangezien men $L(x)$ als een bijzonder geval van een bilineairen vorm kan opvatten, is, volgens XV, $L(\cdot)$ $O(\cdot, x')$ eenvoudig $L(x)$, waarin x_p door $\sum_{q=1}^{\infty} o_{pq}\, x'_q$ is vervangen, d. i. $L(x)$, waarin de orthogonale substitutie

$$x_p = \sum_{q=1}^{\infty} o_{pq}\, x'_q$$

is uitgevoerd; dit schrijven wij $L'(x')$, dus

$$L'(x') = L(\cdot)\ O(\cdot, x').$$

Evenzoo volgt uit XV, dat

$$A'(x', y') = O(\cdot, x')\ A(\cdot, \dagger)\ O(\dagger, y')$$

is.

Aan de hand van deze laatste betrekking is men in staat, eene hoogst belangrijke eigenschap af te leiden.

XXIII. *De samenstelling van twee begrensde bilineaire vormen is bij orthogonale transformatie covariant.*

Zijn $A(x, y)$ en $B(x, y)$ de twee bilineaire vormen en $C(x, y)$ hunne samenstelling, zoodat men dus heeft

$$C(x, y) = A(x, \cdot)\ B(\cdot, y),$$

en stelt men de vormen $A'(x', y')$ en $B'(x', y')$ (welke vormen overeenkomstig XXII niets anders zijn, dan de bilineaire vormen, die men verkrijgt, door op $A(x, y)$ en $B(x, y)$ eene orthogonale substitutie uit te voeren) samen, dan is weer volgens XXII

$$A'(x', \cdot)\ B'(\cdot, y') = O(\cdot, x')\ A(\cdot, *)\ O(*, \cdot)\ O(\dagger, \cdot)\ B(\dagger, \times)\ C(\times, y').$$

Volgens XX is

$$O(*,\cdot)\ O(\dagger,\cdot) = (*,\dagger),$$

dus

$$\begin{aligned} A'(x',\cdot)\ B'(\cdot,y') &= O(\cdot,x')\ A(\cdot,\dagger)\ B(\dagger,\times)\ O(\times,y') \\ &= O(\cdot,x')\ C(\cdot,\times)\ O(\times,y') \\ &= C'(x',y'). \end{aligned}$$

De te bewijzen stelling leest men gemakkelijk af uit de vergelijking

$$A'(x',\cdot)\ B'(\cdot,y') = C'(x',y');$$

deze toch leert ons, dat de getransformeerde vorm $C'(x',y')$ uit $A'(x',y')$ en $B'(x',y')$ juist zoo gevormd is, als $C(x,y)$ uit $A(x,y)$ en $B(x,y)$, namelijk door samenstelling.

Alvorens tot de afleiding van eene reeks van stellingen van anderen aard over te gaan, wil ik nog eene eigenschap der begrensde lineaire vormen bewijzen. Zooals in hoofdstuk IV blijken zal, komen in de toepassingen dikwijls begrensde lineaire vormen voor, waarin de grootheden $x_1, x_2, \ldots\ldots$ functies van eene veranderlijke ξ zijn; voor zulke vormen geldt de volgende stelling.

XXIV. *Stelt men in den begrensden lineairen vorm*

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots$$

voor $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots$ *de functies* $x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots\ldots\ldots$ *met de eigenschap*

$$x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + \ldots\ldots\ldots \leqq M$$

dan convergeert de reeks

$$L(x(\xi)) = l_1 x_1(\xi) + l_2 x_2(\xi) + \ldots\ldots\ldots$$

uniform en absoluut in ξ.

Het bewijs dezer stelling verkrijgt men gemakkelijk, door van de ongelijkheid

$$\begin{aligned} &|\, l_n x_n(\xi)\,| + |\, l_{n+1} x_{n+1}(\xi)\,| + \ldots\ldots\ |\, l_{n+m} x_{n+m}(\xi)\,| \leqq \\ &\leqq \sqrt{l_n^2 + \ldots\ldots l_{n+m}^2}\ \sqrt{x_n^2(\xi) + \ldots\ldots x_{n+m}^2(\xi)} \end{aligned}$$

uit te gaan.

Omdat (l,l) convergeert en $(x,x) \leqq M$ is, kan men onafhankelijk van m, bij voldoend groote waarde van n, het rechter lid en dus ook het linker lid van de ongelijkheid kleiner krijgen, dan eene vooraf gegeven grootheid ε en dit onafhankelijk van de waarde van ξ. De reeks $L(x(\xi))$ convergeert dus uniform en absoluut in ξ; absoluut, omdat de reeks der moduli convergeert. Uit het bewijs is bovendien duidelijk, dat $x_1, x_2, \ldots\ldots$ functies mogen zijn van meerdere veranderlijken $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$, welke zelfs oneindig in aantal kunnen zijn; ook behoeven die functies niet continu te zijn, indien maar

$$x_1^2(\xi) + x_2^2(\xi) + \ldots\ldots\ldots \leqq M$$

is.

§ 2. Continuïteit van lineaire, bilineaire en kwadratische vormen.

Naast het opsporen van de voorwaarden, waaraan een lineaire of bilineaire vorm moet voldoen, opdat zij convergeere, is het onderzoek naar de voorwaarden, welke voor de continuïteit van die vormen vereischt worden, van gewicht. Aangezien wij hier te doen hebben met functies van oneindig vele veranderlijken, dient men eerst scherp vast te stellen, wat men onder de continuïteit van zulk een vorm verstaat.

DEFINITIE. Eene functie $F(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ heet voor het stel waarden $x_1, x_2, \ldots\ldots$ continu, indien $F(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \ldots\ldots)$ naar $F(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ convergeert, zoodra $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots\ldots$ naar nul convergeert en steeds $\sum_{q=1}^{\infty}(x_q+\varepsilon_q)^2 \leqq 1$ is.

Deze definitie strookt geheel met die, welke men geeft voor functies van een eindig aantal veranderlijken.

Bij eene functie van een eindig aantal veranderlijken kan zich het geval voordoen, dat zij in een punt discontinu is, terwijl het verloop van de functie toch continu is, wanneer de veranderlijken op bijzondere wijze naar dat punt convergeeren. Als voorbeeld moge dienen de functie $\sin \frac{y}{x}$, welke voor $x=0$, $y=0$ de waarde nul moge hebben; deze functie is blijkbaar in dit punt discontinu, terwijl zij een continu verloop heeft, wanneer de veranderlijken x en y zóó naar nul convergeeren, dat steeds $\frac{y}{x} = k\pi$ is.

Bij functies van oneindig vele veranderlijken, kunnen zich dergelijke gevallen natuurlijk in veel grootere verscheidenheid voordoen; het is ook duidelijk, dat functies van oneindig vele veranderlijken, welke continu zijn in den zin van de laatste definitie, zeker nog discontinu kunnen zijn, wanneer men de ε's op andere wijze naar nul laat naderen, dan in die definitie wordt geëischt. Functies nu, welke de eigenschap bezitten, dat steeds $F(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \ldots\ldots)$ naar $F(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ convergeert, hoe men de ε's ook naar nul laat convergeeren noemt men *volkomen continu.*

De volkomen continuïteit legt aan eene functie een zwaarderen eisch op dan de gewone continuïteit, want al convergeeren alle ε's naar nul, dan behoeft $\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p^2$ nog niet gelijktijdig naar nul te convergeeren. Is bijvoorbeeld

$$\varepsilon_p = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+p)(n+p-1)}},$$

dan is

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_p = 0$$

voor alle waarden van p. Maar

$$\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p^2=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n}{(n+p)(n+p-1)}=n\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=n.\frac{1}{n}=1\,,$$

zoodat

$$\lim_{n=\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p^2=1$$

en niet gelijk aan nul is. Eene functie, die voor $x_1=x_2=\ldots=0$ continu is behoeft dus niet aan de voorwaarde te voldoen, dat

$$\lim_{n=\infty}\mathrm{F}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots)=0$$

is, als men voor de ε's bovenstaande neemt; wel moet dit het geval zijn, als F volkomen continu is.

Na deze bepalingen gegeven te hebben, kan ik overgaan tot de bespreking van eenige stellingen, die betrekking hebben op de continuïteit van lineaire en bilineaire vormen van oneindig vele veranderlijken.

XXV. *Een begrensde lineaire vorm is continu.*

Het gestelde volgt onmiddellijk uit de volgende betrekking:

$$|\,\mathrm{L}(x+\varepsilon)-\mathrm{L}(x)\,|=|\,\mathrm{L}(\varepsilon)\,|\leqq\sqrt{(l,l)}\,\sqrt{(\varepsilon,\varepsilon)}.$$

XXVI. *Ook een begrensde bilineaire vorm is continu.*

Want

$$|\,\mathrm{A}(x+\varepsilon,y+\delta)-\mathrm{A}(x,y)\,|\leqq|\,\mathrm{A}(x,\delta)\,|+|\,\mathrm{A}(\varepsilon,\delta)\,|+|\,\mathrm{A}(\varepsilon,y)\,|=$$

$$=\left|\sum_{q=1}^{\infty}\delta_q\left(\sum_{p=1}^{\infty}a_{pq}x_p\right)\right|+\left|\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p\left(\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right)\right|+\left|\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}\delta_q\right|,$$

zoodat dus volgens I

$$\left|\mathrm{A}(x+\varepsilon,y+\delta)-\mathrm{A}(x,y)\right|\leqq\left|\sqrt{\sum_{q=1}^{\infty}\delta_q^2\cdot\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}a_{pq}x_p\right)^2}\right|+$$

$$+\left|\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p^2\cdot\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right)^2}\right|+\mathrm{M}\sqrt{(\varepsilon,\varepsilon)}\,\sqrt{(\delta,\delta)}$$

is.

Blijkens XII convergeeren de beide sommen $\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{\infty}a_{pq}x_p\right)^2$ en $\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}y_q\right)^2$ als zijnde $\mathrm{A}(x,\cdot)\,\mathrm{A}(x,\cdot)$ en $\mathrm{A}(\cdot,y)\,\mathrm{A}(\cdot,y)$ (zie ook XX), zoodat dus het linker lid en daarmee ook het rechter lid van bovenstaande ongelijkheid nul wordt voor $\lim(\varepsilon,\varepsilon)=\lim(\delta,\delta)=0$.

XXVII. *Een begrensde lineaire vorm is volkomen continu.*

Men kan dit als volgt bewijzen:

$$|\,L(x+\varepsilon)-L(x)\,| = |\,L(\varepsilon)\,| \leqq |\,l_1\varepsilon_1+\ldots+l_n\varepsilon_n\,| + |\,l_{n+1}\varepsilon_{n+1}+\ldots\ldots\,|$$
$$\leqq |\,l_1\varepsilon_1+\ldots+l_n\varepsilon_n\,| + \sqrt{l_{n+1}^2+\ldots}\sqrt{\varepsilon_{n+1}^2+\ldots}$$

Bij het convergeeren der afzonderlijke ε's naar nul, doorloopen $x_1+\varepsilon_1$, $x_2+\varepsilon_2$, ... waarden $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, \ldots$, die naar $x_1, x_2, \ldots$ convergeeren.

In elk geval is

$$\varepsilon_p^2 = \{(x_p+\varepsilon_p)-x_p\}^2 = (x_p+\varepsilon_p)^2 + x_p^2 - 2\,x_p\,(x_p+\varepsilon_p),$$

en dus

$$\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon_p^2 \leqq \sum_{p=1}^{\infty}x_p^2 + \sum_{p=1}^{\infty}(x_p+\varepsilon_p)^2 + 2\sqrt{\sum_{p=n}^{\infty}x_p^2}\,\sqrt{\sum_{p=n}^{\infty}(x_p+\varepsilon_p)^2} \leqq 4$$

voor $(x,x)\leqq 1$ en $(x+\varepsilon,\ x+\varepsilon)\leqq 1$.

Bijgevolg wordt

$$|\,L(x+\varepsilon)-L(x)\,| \leqq |\,l_1\varepsilon_1+\ldots+l_n\varepsilon_n\,| + 2\sqrt{l_{n+1}^2+\ldots}$$

Nu kan men eerst n zoo groot nemen, dat

$$2\sqrt{l_{n+1}^2+\ldots\ldots} < \frac{\delta}{2}$$

wordt, en daarna $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ zoo dicht bij nul, dat

$$|\,l_1\varepsilon_1+\ldots\ldots+l_n\varepsilon_n\,| < \frac{\delta}{2}$$

wordt. Dan wordt

$$|\,L(x+\varepsilon)-L(x)\,| < \delta$$

en dit bewijst de stelling.

Een begrensde bilineaire of kwadratische vorm behoeft niet volkomen continu te zijn; dit ziet men gemakkelijk aan den vorm

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ldots\ldots$$

Hierbij reduceert zich $A(x+\varepsilon, y+\delta) - A(x,y)$ tot

$$\varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \varepsilon_3\delta_3 \ldots\ldots$$

Deze som convergeert niet naar nul, wanneer men de ε's en de δ's op willekeurige wijze tot nul laat naderen.

XXVIII. *Een bilineaire of kwadratische vorm is slechts dan volkomen continu, als hij het voor* $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = 0$, $y_1 = y_2 = \ldots\ldots = 0$ *is.*

Men heeft namelijk

$$A(x+\varepsilon, y+\delta) - A(x,y) = A(\varepsilon, y) + A(x,\delta) + A(\varepsilon,\delta).$$

Is nu $A(x,y)$ voor de waarden $x_1, x_2, \ldots\ldots, y_1, y_2, \ldots\ldots$ volkomen continu, dan convergeert dus

$$A(\varepsilon, y) + A(x,\delta) + A(\varepsilon,\delta)$$

naar nul, indien alle ε en δ naar nul convergeeren. De eerste twee termen doen het echter als begrensde lineaire vormen (zie XII) in ε en δ, zoodat dus

$$\lim_{\varepsilon=0,\,\delta=0} A(\varepsilon,\delta) = 0$$

is. Is de bilineaire vorm niet volkomen continu, dan bewijst men op geheel dezelfde manier, dat hij het ook niet is voor $x_1 = x_2 = \ldots = 0$, $y_1 = y_2 = \ldots 0$.

Het is van belang na te gaan, hoe het gesteld is met de continuïteit van de samenstelling van twee bilineaire vormen.

XXIX. *Is* $A(x, y)$ *volkomen continu, dan is het ook* $A(x, \cdot)\ A(\cdot, y)$.

Immers, blijkens XV is dit $A(x, y)$, waarin x_α door $\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p$ vervangen is; convergeeren nu alle x_p en y_q naar nul, dan convergeeren blijkens VI en XXVII alle $\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p$ naar nul, en dus volgens het ondersteide ook $A(x, \cdot)\ A(\cdot, y)$, hetgeen volgens XXVIII meebrengt, dat $A(x, \cdot)\ A(\cdot, y)$ volkomen continu is. Evenzoo is $A(x, \cdot)\ B(\cdot, y)$ volkomen continu, indien $A(x, y)$ en $B(x, y)$ het zijn.

XXX. *Is* $A(x, y)$ *volkomen continu en* $B(x, y)$ *willekeurig, maar steeds*

$$|\,B(x, y)\,| \leqq |\,A(x, y)\,|\,,$$

dan is ook $B(x, y)$ *volkomen continu.*

Want convergeeren alle x en y naar nul, dan convergeert $A(x, y)$ naar nul en moet ook $B(x, y)$ dat doen, wat insluit, dat ook $B(x, y)$ volkomen continu is.

XXXI. *Is* $A(x, y)$ *volkomen continu en* $B(x, y)$ *begrensd, dan is* $A(x, \cdot)\ B(\cdot, y)$ *volkomen continu.*

Volgens XII heeft men nl. de volgende betrekkingen

$$A(x, \cdot)\ B(\cdot, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q} y_q \right)$$

$$A(x, \cdot)\ A(x, \cdot) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{p\alpha} x_p \right)^2$$

$$B(\cdot, y)\ B(\cdot, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} b_{\alpha q} y_q \right)^2.$$

Wegens I is dus

$$|\,A(x, \cdot)\ B(\cdot, y)\,| \leqq \sqrt{\{A(x, \cdot)\ A(x, \cdot)\}\ \{B(\cdot, y)\ B(\cdot, y)\}}.$$

Van de twee factoren in het rechter lid van de laatste ongelijkheid is $B(\cdot, y)\ B(\cdot, y)$ begrensd en $A(x, \cdot)\ A(x, \cdot) = A(x, \cdot)\ \bar{A}(\cdot, x)$ convergeert voor $\lim x = \lim y = 0$ naar nul, wegens XXIX, daar, indien $A(x, y)$ volkomen continu is, natuurlijk ook $\bar{A}(x, y)$ het is. Wegens XXVIII is dus de stelling bewezen.

XXXII. *De volkomen continuïteit van* $A(x, \cdot)\ A(y, \cdot)$ *sluit die van* $A(x, y)$ *in.*

In verband met XXVIII volgt de juistheid dezer stelling uit het feit, dat wegens XII $A(x, y)$ absoluut kleiner is dan of hoogstens gelijk is aan $A(x, \cdot)\ A(y, \cdot)$.

XXXIII. Al het bovenstaande kan men evenzoo voor kwadratische vormen bewijzen. Maar men kan dit ook doen, door op te merken, dat indien $A(x, x)$ volkomen continu is, ook $A(x, y)$ het is. Dit volgt in verband met XXVIII uit de in V voorkomende ongelijkheid

$$| A_n(x, y) | \leqq \tfrac{1}{4}\ | A_n(x + y) + A_n(x - y) | ,$$

die de ongelijkheid

$$| A_n(x, y) | \leqq \tfrac{1}{4}\ | A(x + y) + A(x - y) |$$

meebrengt.

Ik zal deze reeks stellingen besluiten met van de *kwadratische* vormen nog eenige eigenschappen af te leiden, betrekking hebbende op hunne continuïteit.

XXXIV. *Is* $A^n(x, x)$ *volkomen continu, dan is dit ook het geval met* $A(x, x)$.

Voor de beteekenis van $A^n(x, x)$ zie men XVI.

Om deze stelling te bewijzen, onderstelle men, dat 2^m de kleinste macht van 2 is, die niet kleiner dan n is, dan volgt door XXXI $2^m - n$ keer toe te passen, dat $A^{2^m}(x, x)$ volkomen continu is en hieruit, dat $A^{2^m - 1}(x, x)$, $A^{2^m - 2}(x, x)$ enz. en ten slotte $A(x, x)$ volkomen continu is.

XXXV. *Is in een kwadratischen vorm* $A(x, x)$ *de som* $\sum\limits_{p, q = 1}^{\infty} a_{pq}^2$ *convergent, dan is* $A(x, x)$ *volkomen continu.*

Volgens XXI weet men, dat

$$| A(x, x) | \leqq \sqrt{\sum_{p, q = 1}^{\infty} a_{pq}^2}$$

is.

Evenzoo zal

$$| A(x, x) - A_n(x, x) | \leqq \sqrt{\sum_{p, q = n}^{\infty} a_{pq}}$$

zijn, waarbij in

$$\sum_{p, q = n}^{\infty} a_{pq}^2$$

p en q niet beide $\leqq n$ zijn. Daar echter

$$\lim_{n = \infty} \sum_{p, q = n}^{\infty} a_{pq}^2 = 0$$

is, kan men n zóó groot nemen, dat

$$| A(x,x) - A_n(x,x) | < \frac{\delta}{2}$$

wordt, en daarna de x-en zoo klein, dat

$$| A_n(x,x) | < \frac{\delta}{2}$$

wordt. Dan kan men schrijven

$$| A(x,x) | \leqq | A(x,x) - A_n(x,x) | + | A_n(x,x) | < \delta,$$

zoodat voor $\lim x = 0$ ook

$$\lim A(x,x) = 0$$

wordt. Volgens XXVIII is $A(x,x)$ dus volkomen continu.

XXXVI. *Is* $A(x,x)$ *definiet en is*

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{pp}^2$$

convergent, dan is $A(x,x)$ *volkomen continu.*

Want daar $A(x,x)$ definiet is, is

$$a_{pq}^2 \leqq a_{pp}\, a_{qq}$$

en is dus

$$\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}^2 \leqq \sum_{p,q=1}^{n} a_{pp}\, a_{qq} \leqq \sum_{p=1}^{n} a_{pp}^2$$

(wegens I), zoodat

$$\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}^2$$

convergeert, waaruit wegens XXXV het gestelde volgt.

Na deze stellingen, die op de continuïteit van kwadratische, lineaire en bilineaire vormen betrekking hadden, bewezen te hebben, zal ik dit hoofdstuk besluiten met de bespreking van eenige stellingen, die op de volkomen continuïteit van functies van ∞ veel veranderlijken in 't algemeen betrekking hebben.

§ 3. De volkomen continuïteit van functies van oneindig vele veranderlijken.

XXXVII. *Is eene volkomen continue functie begrensd, dan heeft zij een maximum en een minimum.*

De oneindig vele waarden, die F kan aannemen, zijn alle grooter dan een getal m en kleiner dan een getal M; en wel kan men m zoo groot en M zoo klein nemen, dat ieder getal grooter dan m ook grooter en ieder getal kleiner dan M ook kleiner dan een of meer waarden van F is. Als dus F eene grootste waarde aanneemt, moet die waarde noodzakelijk M zijn; er moet slechts bewezen worden, dat M inderdaad bereikt wordt, hetgeen, zooals blijken zal, uit de continuïteit volgt. Men

heeft natuurlijk alleen het geval te beschouwen, dat M een ophoopingspunt is; anders is M van zelf het maximum der functiewaarden. Er moet dus aangetoond worden, dat het ophoopingspunt M zelf eene functiewaarde is, m. a. w., dat de verzameling *afgesloten* is.

Bewijs der stelling.

Uit de verzameling van functiewaarden kan men eene rij F-waarden kiezen die naar M convergeeren; duiden wij deze rij aan door

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \dots\dots\dots$$

Bij elken term van deze rij behoort een systeem x-waarden.

Laten bij $F^{(1)}$ de waarden

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots\dots\dots$$

behooren; bij $F^{(2)}$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots\dots\dots$$

In het algemeen behoore bij $F^{(p)}$ het stelsel waarden

$$x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots\dots\dots$$

Om het overzicht en de redeneering gemakkelijk te maken, vatte men dit als volgt samen:

$$\begin{array}{lcc} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots\dots & \text{behooren bij} & F^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots\dots & ,, \quad ,, & F^{(2)} \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots\dots & ,, \quad ,, & F^{(3)} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, x_3^{(p)}, \dots\dots & ,, \quad ,, & F^{(p)} \end{array}$$

In eene verticale rij van x-waarden bevindt zich zeker een ophoopingspunt x_1; licht nu uit de eerste verticale rij van x-waarden eene onderrij die convergent is; dit geeft natuurlijk eene onderrij in de rij

$$F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}, \dots\dots\dots ;$$

déze onderrij zal ook naar M convergeeren, omdat eene onderrij uit eene convergente rij wederom convergeert.

De eerste onderrij, die men aldus uit de eerste verticale x-rij verkregen heeft, geve men als volgt aan:

$$(1) \qquad \begin{array}{c} x_1^{(1,1)} \\ x_1^{(1,2)} \\ x_1^{(1,3)} \\ \vdots \\ \text{limiet } x_1 \end{array}$$

Met deze onderrij komt eene onderrij overeen in de verticale rij van de x_2's; deze onderrij geve men in overeenstemming met de onderrij uit de x_1's aldus aan:

$$(2) \qquad \begin{array}{c} x_2^{(1,1)} \\ x_2^{(1,2)} \\ x_2^{(1,3)} \\ \vdots \end{array}$$

De onderrij in de verticale rij der x_p's wordt dus aangegeven door

$$x_p^{(1,1)}$$
$$x_p^{(1,2)}$$
(3) $$x_p^{(1,3)}$$
$$\vdots$$

In 't algemeen zullen de onderrijen uit de x_2's, x_3's enz. niet convergeeren.

Licht nu uit de rij (2) ook eene convergente onderrij, die men als volgt aanduide:

$$x_2^{(2,1)}$$
$$x_2^{(2,2)}$$
$$x_2^{(2,3)}$$
$$\vdots$$
$$\text{limiet } x_2$$

Dit levert weer overeenkomstige onderrijen in de overige verticale x-rijen en natuurlijk ook in de serie (1); deze onderrij is echter weer convergent, aangezien de oorspronkelijke reeks zelf convergeert. Wij hebben nu dus het volgende schema:

$x_1^{(2,1)}$	$x_2^{(2,1)}$	$x_3^{(2,1)}$	.	.	$F^{(2,1)}$
$x_1^{(2,2)}$	$x_2^{(2,2)}$	$x_3^{(2,2)}$	.	.	$F^{(2,2)}$
$x_1^{(2,3)}$	$x_2^{(2,3)}$	$x_3^{(2,3)}$	.	.	$F^{(2,3)}$
.	.	.			.
limiet x_1	limiet x_2				limiet M

De x_3's convergeeren nu nog niet; licht ook uit deze serie eene onderrij die convergeert, namelijk

$$x_3^{(3,1)}$$
$$x_3^{(3,2)}$$
$$\vdots$$
$$\text{limiet } x_3$$

Zoodoende komt men ten slotte tot het volgende schema:

$x_1^{(p,1)}$	$x_2^{(p,1)}$	.	.	$x_p^{(p,1)}$	$x_{p+1}^{(p,1)}$	.	.	$F^{(p\,1)}$
$x_1^{(p,2)}$	$x_2^{(p,2)}$	.	.	$x_p^{(p,2)}$	$x_{p+1}^{(p,2)}$	.	.	$F^{(p,2)}$
$x_1^{(p,3)}$	$x_2^{(p,3)}$	.	.	$x_p^{(p,3)}$	$x_{p+1}^{(p,3)}$	.	.	$F^{(p,3)}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
limiet x_1	limiet x_2	.		limiet x_p	.	.	.	limiet M

Kies nu

$$x_p^{(1,1)},\ x_p^{(2,2)},\ \ldots\ldots,\ x_p^{(p,p)},\ x_p^{(p+1,\,p+1)},\ \ldots\ldots$$

dit is eene convergente rij van getallen met x_p tot limiet, want $x_p^{(p+1,\,p+1)}$ wil zeggen de $(p+1)^e$ term van de x_p-reeks, nadat de x_{p+1}-reeks convergent gemaakt is, dus $x_p^{(p+1,\,p+1)}$ is een term van eene convergente

onderrij uit de oorspronkelijke x_p-reeks. Men ziet dus, dat

$$x_p^{(p,p)},\ x_p^{(p+1,p+1)},\ x_p^{(p+2,p+2)},\ \ldots\ldots$$

eene onderrij is van de convergente rij

$$x_p^{(p,1)},\ x_p^{(p,2)},\ x_p^{(p,3)},\ \ldots\ldots$$

en wel geldt dit voor alle p.

Ten slotte krijgt men dus

$x_1^{(1,1)}$	$x_2^{(1,1)}$	.	.	$x_p^{(1,1)}$	$x_{p+1}^{(1,1)}$	.	.	$F^{(1,1)}$
$x_1^{(2,2)}$	$x_2^{(2,2)}$	.	.	$x_p^{(2,2)}$	$x_{p+1}^{(2,2)}$	.	.	$F^{(2,2)}$
$x_1^{(3,3)}$	$x_2^{(3,3)}$	.	.	$x_p^{(3,3)}$	$x_{p+1}^{(3,3)}$	.	.	$F^{(3,3)}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
limiet x_1	limiet x_2			limiet x_p	limiet x_{p+1}			limiet M

Aangezien de rij van F-waarden naar M convergeert, en alle x-waarden respectievelijk naar de limieten x_1, x_2, ... convergeeren, wordt, in verband met de volkomen continuïteit der functie, de waarde M inderdaad door haar bereikt, wanneer men aan de veranderlijken de waarden x_1, x_2, ... geeft.

Opmerking: Stellen $L_1(x)$, $L_2(x)$,....., $L_m(x)$ m volkomen continue functies van de veranderlijken x_1, x_2, ... voor en laat men alleen die waardesystemen toe, die aan de voorwaarden voldoen, dat zij de vergelijkingen $L_1(x) = 0$, $L_2(x) = 0$, ..., $L_m(x) = 0$ bevredigen, dan bezit F eveneens een maximum. De redeneering blijft geheel dezelfde; alleen ontbreken er waarden in de verzameling der waarden van F.

XXXVIII. *Is eene functie* F *der oneindig vele veranderlijken* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *voor alle waarden van* x, *waarvoor*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots\ldots \leqq 1$$

is, volkomen continu, dan convergeert het maximum van [1])

$$|\,F(x) - F_n(x)\,|$$

voor toenemende waarden van n *naar nul.*

Stel namelijk, dat dit niet het geval was, dan moesten voor oneindig vele waarden van n de maxima van

$$|\,F(x) - F_n(x)\,|$$

boven een van nul verschillend positief getal liggen. In dat geval zijn er dus oneindig vele waardesystemen

$$a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ \ldots\ldots\ldots,$$

waarvoor

$$|\,F(a^{(n)}) - F_n(a^{(n)})\,| > p \qquad (p > 0)$$

is. Men kan nu (zie het bewijs van de vorige stelling) uit die oneindige rij van waardesystemen eene zoodanige lichten, dat

1) $F_n(x)$ is $F(x)$, waarin $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots\ldots = 0$ is.

$$\lim_{k=\infty} a_1^{(n_k)} = b_1, \ \lim_{k=\infty} a_2^{(n_k)} = b_2, \dots\dots\dots$$

wordt. Aangezien de functie volkomen continu is ondersteld, is

(4) $$\lim_{k=\infty} \mathrm{F}(a^{(n_k)}) = \mathrm{F}(b).$$

Kiest men nu waardesystemen $c_p^{(n_k)}$ zoo, dat

$$c_p^{(n_k)} = a_p^{(n_k)} \text{ voor } p \leqq n_k$$
$$c_p^{(n_k)} = 0 \quad \text{,,} \quad p > n_k$$

is, dan heeft men

$$\lim_{k=\infty} c_1^{(n_k)} = b_1, \ \lim_{k=\infty} c_2^{(n_k)} = b_2, \dots\dots\dots$$

en dus ook

(5) $$\lim_{k=\infty} \mathrm{F}(c^{(n_k)}) = \lim_{k=\infty} \mathrm{F}_{n_k}(a^{(n_k)}) = \mathrm{F}(b).$$

Volgens (4) heeft men, te beginnen bij eene bepaalde waarde van n_k,

$$| \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a_{n_k}) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

en volgens (5) heeft men, te beginnen bij eene bepaalde waarde van n_k,

$$| \mathrm{F}_{n_k}(a^{(n_k)}) - \mathrm{F}(b) | < \frac{\varepsilon}{2},$$

zoodat men dus de volgende ongelijkheid kan opschrijven:

$$| \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a^{(n_k)}) - \mathrm{F}(b) + \mathrm{F}_{n_k}(a^{(n_k)}) | < \varepsilon$$

of

(6) $$| \mathrm{F}(a^{(n_k)}) - \mathrm{F}_{n_k}(a^{(n_k)}) | < \varepsilon.$$

De onderstelling, dat er oneindig vele waardesystemen $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots\dots$ zouden zijn, waarvoor de ongelijkheid

(7) $$| \mathrm{F}(a^{(n)}) - \mathrm{F}_n(a^{(n)}) | > p \qquad (p > 0)$$

zoude gelden, is dus daarom onjuist, omdat men uit die waardesystemen $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots\dots\dots$ eene serie heeft kunnen kiezen, die (6) bevredigt, hetgeen met (7) strijdt.

XXXIX. *Is* F *eene volkomen continue functie der oneindig vele veranderlijken* $x_1, x_2, \dots\dots\dots$, *dan convergeert* $\mathrm{F}_n(x)$ *voor* $\lim n = \infty$ *uniform in alle x-en naar* $\mathrm{F}(x)$.

Deze stelling kan men, in verband met de hierboven afgeleide eigenschap, als volgt bewijzen.

Steeds is

$$| \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}_n(x) | \leqq | \mathrm{F}_n(a) | ;$$

hierin stellen $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots.$ de waarden voor, waarvoor

$$| \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}_n(x) |$$

maximum is; men weet nu uit de vorige stelling, dat men n zóó groot kan nemen, dat het tweede lid van bovenstaande ongelijkheid kleiner dan eene vooraf gegeven positieve grootheid ε wordt; dan wordt dus voor alle waarden der x-en, waarvoor $(x, x) \leqq 1$ is,

$$| F(x) - F_n(x) | < \varepsilon,$$

wat te bewijzen was.

XXXX. *Is* $A(x, y)$ *een volkomen continue bilineaire vorm, dan convergeert*

$$A_n(\cdot, x) \; A_n(\cdot, y)$$

bij toenemende n uniform in de x-en en y's $((x, x) \leqq 1, (y, y) \leqq 1)$ *naar* $A(\cdot, x) \; A(\cdot, x)$.

Daar $A(x, y)$ volkomen continu is, is $A(\cdot, x) \; A(\cdot, y)$ dat wegens XXXI ook, daar

$$A(\cdot, x) \; A(\cdot, y) = \bar{A}(x, \cdot) \; A(\cdot, y)$$

is. Bijgevolg kan men n zóó groot kiezen, dat voor alle x en y $((x, y) \leqq 1, \; (y, y) \leqq 1)$ volgens de vorige stelling

$$| A(\cdot, x) \; A(\cdot, y) - [A(\cdot, x)(\cdot, y)]_n | < \tfrac{1}{2} \varepsilon$$

wordt. Andererzijds kan men n zoo groot kiezen, dat

$$[A(\cdot, x) \; A(\cdot, y)]_n - A_n(\cdot, x) \; A_n(\cdot, y) = \sum_{p,q=1}^{n} x_p \, y_q \sum_{r=n+1}^{\infty} a_{rp} \, a_{rq},$$

absoluut genomen, kleiner dan $\frac{1}{2} \varepsilon$ wordt. Want

$$\sum_{p,q=1}^{n} x_p \, y_q \sum_{r=n+1}^{\infty} a_{rp} \, a_{rq} = \sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{rp} \, x_p \right) \left(\sum_{q=1}^{n} a_{rq} \, y_q \right), \qquad (1)$$

en volgens I is het kwadraat hiervan kleiner dan

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{rp} \, x_p \right)^2 \cdot \sum_{r=n+n}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} a_{rq} \, y_q \right)^2.$$

Elk dezer twee factoren kan men echter kleiner dan $\frac{1}{2} \varepsilon$ maken voor alle x en y, die aan $(x, x) \leqq 1$ en $(y, y) \leqq 1$ voldoen. Immers

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{rp} \, x_p \right)^2,$$

bijvoorbeeld, is

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{rp} \, x_p \right)^2 = (A \cdot, x) \; A(\cdot, x) - [A(\cdot, x) \; A \cdot, x)]_n,$$

waarin $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ is genomen en dit is, zooals reeds opgemerkt is, voor voldoend groote n kleiner dan $\frac{1}{2} \varepsilon$. Voor die en grootere n wordt zoo

$$| A(\cdot, x) \, A(\cdot, y) - A_n(\cdot, y) | \leqq | A(\cdot, x) \, A(\cdot, y) - [A(\cdot, x) \, A(\cdot, y)]_n | +$$
$$+ | [A(\cdot, x) \, A(\cdot, y)]_n - A_n(\cdot, x) \, A_n(\cdot, y) | < \varepsilon,$$

hetgeen te bewijzen was.

XXXI. *Is* $F(x_1, x_2, \ldots)$ *eene volkomen continue functie der veranderlijken* $x_1, x_2, \ldots$ *en zijn* $x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots$ *volkomen continue functies van* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *(eindig of oneindig in aantal), dan is*

$$F(x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots)$$

in elk gebied der ξ's $((\xi, \xi) \leqq 1)$, *waarin*

$$(x_1(\xi))^2 + (x_2(\xi))^2 + \ldots \leqq 1$$

is, eene volkomen continue functie der ξ's.

Convergeeren $\xi_1', \xi_2', \ldots$ nl. naar $\xi_1, \xi_2, \ldots$, dan convergeeren ook $x_1(\xi'), x_2(\xi'), \ldots$ naar $x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots$ en mitsdien zal $F(x_1(\xi'), x_2(\xi'), \ldots)$ naar $F(x_1(\xi), x_2(\xi), \ldots)$ convergeeren.

Hiermede zijn alle hulpstellingen afgeleid, wier kennis voor de ontwikkelingen in de volgende hoofdstukken noodig is. Ik wil alleen nog opmerken, dat eenige der stellingen, die op de lineaire, bilineaire en kwadratische vormen betrekking hebben, in het volgende geene toepassing zullen vinden en slechts volledigheidshalve vermeld zijn.

HOOFDSTUK III.

§ 1. Orthogonale transformatie van volkomen continue kwadratische vormen.

In dit hoofdstuk zullen drie stellingen bewezen worden, welke in het eerste hoofdstuk zonder bewijs aangenomen zijn. De eerste stelling leert, dat een kwadratische vorm

$$K(x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}\, x_p\, x_q \quad \ldots\ldots \quad (k_{pq} = k_{qp})$$

onder zekere nog nader te bepalen voorwaarden te schrijven is als eene som van kwadraten van lineaire vormen; de tweede, dat een systeem van oneindig vele vergelijkingen met oneindig vele onbekenden, ook onder zekere voorwaarden, eene oplossing toelaat, en de derde, dat het mogelijk is een volledig systeem van orthogonale functies te vinden.

De eerste stelling zal ik echter niet direkt in haar meest algemeenen vorm bewijzen, doch eerst voor een kwadratischen vorm met de eigenschap, dat de samenstelling van den bij dien kwadratischen vorm behoorenden bilineairen vorm met zichzelf weer den bilineairen vorm oplevert. Zulk een vorm zullen wij *elementair* noemen. HILBERT noemt zulk een vorm een 'Einzelform'. Is $E(x, y)$ een elementaire vorm, dan is dus

(1) $$E(x, \cdot)\ E(\cdot\,, y) = E(x, y).$$

Hij is blijkens XII positief definiet.

Een eenvoudig voorbeeld van een elementairen kwadratischen vorm is

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots$$

De lineaire vormen, als de som van wier kwadraten een elementaire kwadratische vorm kan worden geschreven, vormen een orthogonaal systeem; hieronder verstaat men een stelsel van lineaire vormen

$$\begin{array}{l} L_1(x) = l_{11}\, x_1 + l_{12}\, x_2 + \ldots\ldots \\ L_2(x) = l_{21}\, x_1 + l_{22}\, x_2 + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

met de eigenschap, dat

$$L_p(\cdot)\, L_p(\cdot) = \sum_{r=1}^{\infty} l_{pr}^2 = 1$$

en voor $q \neq p$

$$L_p(\cdot)\, L_q(\cdot) = \sum_{r=1}^{\infty} l_{pr}\, l_{qr} = 0$$

is. De stelling, die ik zal afleiden, luidt nu:

Een elementaire kwadratische vorm $E(x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} e_{pq} x_p x_q$ *is te schrijven als eene som van kwadraten van lineaire vormen van een orthogonaal systeem. Omgekeerd stelt de som van de kwadraten van lineaire vormen van een orthogonaal systeem een kwadratischen vorm voor, met eigenschap* (1).

B e w ij s. Stelt men

$$L_1(x) = \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} \sum_{q=1}^{\infty} e_{q1} x_q$$

dan wordt

(2) $$L_1(\cdot)\, E(x, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} \sum_{p=1}^{\infty} e_{p1} \sum_{q=1}^{\infty} e_{qp} x_q = \frac{1}{\sqrt{e_{11}}} \sum_{q=1}^{\infty} e_{1q} x_q = L_1(x),$$

want men moet bedenken, dat wegens (1) de gelijkheid

$$\sum_{r=1}^{\infty} e_{pr} e_{rq} = e_{pq}$$

geldt.

De lineaire vorm $L_1(x)$ bezit de eigenschap, dat

(3) $$L_1(\cdot)\, L_1(\cdot) = 1$$

is, want wegens (1) heeft men

$$L_1(\cdot)\, L_1(\cdot) = \frac{1}{e_{11}} \sum_{p=1}^{\infty} e_{p1}^2 = \frac{e_{11}}{e_{11}} = 1.$$

Met den oorspronkelijken kwadratischen vorm $E(x)$ en den lineairen vorm $L_1(x)$ vormt men den nieuwen kwadratischen vorm

(4ᵃ) $$E_1(x) = E(x) - L_1^2(x),$$

of, wat op hetzelfde neerkomt, den bilineairen vorm

(4ᵇ) $$E_1(x, y) = E(x, y) - L_1(x)\, L_1(y).$$

Door $E_1(x, y)$ met $L_1(x)$ en ook met zich zelf samen te stellen, vindt men, in verband met de voorgaande betrekkingen, de volgende vergelijkingen

(5) $$L_1(\cdot)\, E_1(x, \cdot) = L_1(x) - L_1(x) = 0,$$

$$E_1(x, \cdot)\, E_1(\cdot, y) = \{E(x, \cdot) - L_1(x)\, L_1(\cdot)\}\, \{E(\cdot, y) - L_1(\cdot)\, L(y)\}$$
$$= E(x, y) - L_1(x)\, L_1(y) = E_1(x, y),$$

$E_1(x)$ is dus een elementaire kwadratische vormen dus positief definiet.

Uit de manier waarop $E_1(x)$ gedefinieerd is, blijkt bovendien, dat in $E_1(x)$ de term x_1^2 ontbreekt. Geheel op dezelfde wijze als $E_1(x)$ vormt men den kwadratischen vorm

$$E_2(x) = E_1(x) - L_2^2(x) = E(x) - L_1^2(x) - L_2^2(x),$$

waarin

$$L_2(x) = \frac{1}{\sqrt{e_{22}^1}} \sum_{p=1}^{\infty} e_{p2}^1 x_p$$

gesteld is en e^1_{pq} de coëfficiënt van $x_p y_q$ in $E_1(x, y)$ voorstelt.

Van dezen vorm $E_2(x)$ laat zich wederom gemakkelijk bewijzen, dat

$$E_2(x, \cdot)\, E_2(\cdot, y) = E_2(x, y)$$

is. $E_2(x)$ is dus positief definiet; uit de gedaante van $E_2(x)$ is bovendien

duidelijk, dat de termen x_1^2 en x_2^2 ontbreken en in verband met het positief definiet zijn van den vorm mogen dus x_1 en x_2 er in het geheel niet in voorkomen.

Gaat men aldus voort, dan krijgt men ten slotte den positief definieten vorm

$$E(x) - L_1^2(x) - L_2^2(x), \ldots\ldots,$$

die geen der veranderlijken $x_1, x_2, \ldots$ meer bevat. Hiermee is aangetoond, dat de kwadratische vorm $E(x)$ als eene som van kwadraten van lineaire vormen is te schrijven. Volgens den inhoud der stelling moet nog bewezen worden, dat de lineaire vormen $L_1(x), L_2(x), \ldots$ tot een orthogonaal systeem behooren; hiervoor moet nog slechts worden aangetoond, dat

$$L_1(\cdot)\,L_2(\cdot) = 0, \; L_2(\cdot)\,L_3(\cdot) = 0, \ldots\ldots$$

is. Dit geschiedt door op te merken, dat

(6) $$L_1(\cdot)\,E_1(x, \cdot) = 0,$$

(7) $$L_2(\cdot)\,E_2(x, \cdot) = 0$$

is; de laatste betrekking wordt op dezelfde manier aangetoond als (6).

Vergelijking (7) laat zich in verband met de definitie van $E_2(x)$ en de betrekking

$$L_2(\cdot)\,L_2(\cdot) = 1$$

als volgt schrijven

(8) $$L_2(\cdot)\,E_1(x, \cdot) - L_2(x) = 0.$$

Door nu het linkerlid van (8) met $L_1(x)$ samen te stellen, vindt men

$$L_1(*)\,L_2(\cdot)\,E_1(*, \cdot) - L_1(*)\,L_2(*) = 0.$$

In verband met (6) blijkt $L_1(*)\,L_2(\cdot)\,E_1(*, \cdot)$ gelijk aan nul te zijn, wat ten gevolge heeft, dat ook

$$L_1(*)\,L_2(*) = 0$$

wordt.

De orthogonaliteitseigenschappen laten zich op dezelfde manier voor alle lineaire vormen bewijzen.

Om het omgekeerde van de stelling te bewijzen, gaat men uit van m lineaire orthogonale vormen $L_1(x), L_2(x), \ldots, L_m(x)$, waarmee men de in $x_1, x_2, \ldots$ lineaire uitdrukking

$$M(x) = (x, y) - L_1(x)\,L_1(y) - \ldots\ldots - L_m(x)\,L_m(y)$$

vormt.

Van den vorm $M(x)$ maakt men de samenstelling met zichzelf op en vindt op die wijze

$$M(\cdot)\,M(\cdot) = \{(\cdot, y) - L_1(\cdot)\,L_1(y) - \ldots\ldots - L_m(\cdot)\,L_m(y)\}. \\ .\{(\cdot, y) - L_1(\cdot)\,L_1(y) - \ldots\ldots - L_m(\cdot)\,L_m(y)\}$$

en dus

$$M(\cdot)\,M(\cdot) = (y, y) - L_1^2(y) - \ldots\ldots - L_m^2(y);$$

aangezien $M(\cdot)M(\cdot)$ als de som van de kwadraten van de coëfficiënten van $x_1, x_2, \ldots$ positief is, is ook

(9) $$(y, y) - L_1^2(y) - \ldots\ldots\ldots - L_m^2(y)$$

positief voor elke waarde van m, waaruit volgt, dat

$$L_1^2(y) + L_2^2(y) + L_3^2(y) + \ldots\ldots\ldots$$

een begrensde kwadratische vorm is, die, tengevolge van de orthogonaliteitseigenschappen der vormen L, aan de betrekking

(10) $$E(x, \cdot)E(\cdot\, y) = E(x, y)$$

voldoet, waarmede ook het tweede gedeelte der stelling bewezen is.

Door middel van de juist afgeleide stelling is men in staat om een systeem van lineaire vormen in x te vinden, die tezamen eene orthogonale substitutie der veranderlijken $x_1, x_2, \ldots\ldots$ vormen (zie stelling XX). Men ga als volgt te werk: de kwadratische vorm (9) voldoet aan betrekking (10); derhalve laat de kwadratische vorm (1) zich als eene som van kwadraten van lineaire vormen van een orthogonaal systeem schrijven, aldus:

$$(x, x) - L_1^2(x) - L_2^2(x) - \ldots\ldots = M_1^2(x) + M_2^2(x) + \ldots\ldots;$$

en dus wordt

(11) $$(x, x) = L_1^2(x) + L_2^2(x) + \ldots + M_1^2(x) + M_2^2(x) + \ldots\ldots$$

Zoowel van de lineaire vormen L als van de vormen M weet men, dat zij elk een orthogonaal systeem vormen; aangetoond zal nu worden dat de L's en de M's *tezamen* tot één orthogonaal systeem behooren, waartoe dus bewezen moet worden, dat

$$L_p(\cdot)M_q(\cdot) = 0$$

is.

Te dien einde stelle men

$$L_1^2(x) + L_2^2(x) + \ldots\ldots = E_1(x),$$
$$M_1^2(x) + M_2^2(x) + \ldots\ldots = E_2(x),$$

waardoor, in verband met (11)

$$(x, y) = E_1(x, y) + E_2(x, y)$$

wordt. Hieruit volgt

$$E_1(x, \cdot)(\cdot, y) = E_1(x, \cdot)E_1(\cdot, y) + E_1(x, \cdot)E_2(\cdot, y)$$

of

$$E_1(x, y) = E_1(x, y) + E_1(x, \cdot)E_2(\cdot, y).$$

Dus is

$$E_1(x, \cdot)E_2(\cdot, y) = 0.$$

Bovendien gelden de betrekkingen

$$L_p(x) = L_p(\cdot)E_1(\cdot, x) \text{ en } M_q(x) = E_2(x, *)M_q(*).$$

Men vindt derhalve

$$L_p(\times)M_q(\times) = L_p(\cdot)E_1(\cdot, \times)E_2(\times, *)M_q(*) = 0.$$

Duidt men de lineaire vormen $L_1(x), L_2(x), \ldots\ldots$ en $M_1(x), M_2(x), \ldots\ldots$ alle met hetzelfde teeken L aan, dan heeft men dus

een systeem van lineaire vormen $L_1(x)$, $L_2(x)$, ... gevonden, die orthogonaal zijn en aan de betrekking

$$(x, x) = L_1^2(x) + L_2^2(x) + L_3^2(x) + \dots\dots$$

voldoen. Dit heeft ten gevolge dat de lineaire vormen

$$L_1(x) = \sum_{r=1}^{\infty} l_{1r} x_r,\ L_2(x) = \sum_{r=1}^{\infty} l_{2r} x_r, \dots\dots$$

behalve aan

$$L_p(\cdot) L_p(\cdot) = 1 \quad \text{of} \quad \sum_{r=1}^{\infty} l_{pr}^2 = 1$$

en

$$L_p(\cdot) L_q(\cdot) = 0 \quad \text{of} \quad \sum_{r=1}^{\infty} l_{pr} l_{qr} = 0$$

ook aan

$$\sum_{r=1}^{\infty} l_{rp}^2 = 1 \quad \text{en} \quad \sum_{r=1}^{\infty} l_{rp} l_{rq} = 0$$

voldoen.

Schrijft men in overeenstemming met (XX) x'_1, x'_2, ... voor $L_1(x)$, $L_2(x)$, ..., dan heeft men dus het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
x'_1 &= l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + l_{13} x_3 + \dots\dots\dots \\
x'_2 &= l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + l_{23} x_3 + \dots\dots\dots \\
x'_3 &= l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + l_{33} x_3 + \dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x'_p &= l_{p1} x_1 + l_{p2} x_2 + l_{p3} x_3 + \dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigt men de eerste vergelijking met l_{1p}, de tweede met $l_{2p}, \dots$, de p^e met l_{pp}, enz., en telt op, dan ziet men, dat, in verband met de eigenschappen der coëfficiënten,

$$x_p = l_{1p} x'_1 + l_{2p} x'_2 + l_{3p} x'_3 + \dots\dots\dots$$

is.

Wij zijn derhalve in staat om de x-en in de x'-en uit te drukken, en dus definieeren x'_1, x'_2, ... tezamen eene orthogonale substitutie van de veranderlijken x_1, x_2, ... en omgekeerd.

Het verkregen resultaat komt dus hierop neer, dat men aan elk stelsel van orthogonale lineaire vormen in x_1, x_2, ... altijd weer een zoodanig stelsel kan toevoegen, dat het resulteerende systeem, x'_1, x'_2, ... eene orthogonale substitutie van de veranderlijken x_1, x_2, ... vormt en omgekeerd, eene eigenschap, die bij de afleiding der volgende stelling toegepast zal worden.

Wanneer een begrensde kwadratische vorm $K(x)$ *continu is, laat hij zich steeds door eene orthogonale substitutie in de gedaante*

$$K(x) = k_1 x'^2_1 + k_2 x'^2_2 + k_3 x'^2_3 + \dots\dots$$

brengen, waarin x'_1, x'_2, ... *orthogonale lineaire vormen in de veranderlijken* x_1, x_2, ... *zijn.*

Vooronderstel, om te beginnen, dat $K(x)$ positief definiet is. Laten $x_1 = l_{11}$, $x_2 = l_{12}$, ... waarden van x zijn, waarvoor $K(x)$ maximum wordt en noem dit maximum k_1.

De som van de kwadraten van l_{11}, l_{12}, ... is, in verband met de voorwaarde

$$(x, x) \leqq 1 \quad ,$$

gelijk aan 1, want, indien dit niet het geval ware zou men de waarde van den vorm grooter kunnen krijgen, door alle l_{11}, l_{12}, ... met een zelfde getal te vermenigvuldigen, waarbij aan de voorwaarde voldaan zou blijven.

Men bepaalt nu wederom het maximum k_2 van $K(x)$, maar nu onder de voorwaarde, dat de veranderlijken x_1, x_2, ... aan de betrekking

$$L_1(x) \equiv l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \ldots\ldots = 0$$

gebonden zijn. Laat dit maximum bereikt worden voor de waarden

$$x_1 = l_{21}, \quad x_2 = l_{22}, \ldots\ldots$$

dan is weer

$$l^2_{21} + l^2_{22} + \ldots = 1.$$

Daarna bepaalt men onder de voorwaarden

$$L_1(x) = 0 \text{ en } L_2(x) \equiv l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \ldots\ldots = 0$$

het maximum k_3 van $k(x)$; dit maximum worde bereikt voor

$$x_1 = l_{31}, \quad x_2 = l_{32}, \ldots\ldots,$$

en met deze getallen als coëfficiënten vormt men weer den lineairen vorm

$$L_3(x) = l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + \ldots\ldots$$

Aldus voortgaande krijgt men een systeem van lineaire vormen $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$, ... met de eigenschappen

$$L_p(\cdot)\ L_q(\cdot) = 0, \ L_p(\cdot)\ L_p(\cdot) = 1.$$

Bij dit systeem van orthogonale lineaire vormen bepale men nu een systeem van lineaire vormen $M_1(x)$, $M_2(x)$, ... zoo, dat

$$\begin{aligned} x_1' &= L_1(x), \\ x_2' &= L_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_1 &= M_1(x), \\ y_2 &= M_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

tezamen eene orthogonale substitutie der veranderlijken x_1, x_2, ... vormen; door deze substitutie ga $K(x)$ in $K'(x' \mid y)$ over; dan is

$$(12) \qquad K'(x' \mid y) - k_1 (x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots\ldots + y_1^2 + y_2^2 + \ldots\ldots) = \\ = K(x) - k_1 (x, x).$$

Neemt men in deze betrekking voor $x_1, x_2, \ldots$ de waarden l_{11}, l_{12}, ..., dan komt er rechts nul; links krijgt men $k_{11}' - k_1$, waaruit men ziet, dat de coëfficiënt van $x_1'^2$ in K' gelijk aan k_1 is.

Daar het tweede lid niet positief kan zijn, is ook het eerste lid steeds negatief of nul, en, aangezien $x_1'^2$ er niet in voorkomt, kan x_1' er in het geheel niet in voorkomen. Want ware dit het geval, dan zou het eerste lid van (12) in den vorm

$$x_1' \mathrm{L}(x', \ldots, y) + \mathrm{Q}(x', \ldots, y)$$

geschreven kunnen worden, waarin L een lineaire en Q een kwadratische vorm in $x_2', \ldots, y_1, \ldots$ zou zijn en wel zou minstens één coëfficiënt in $\mathrm{L}(x', \ldots, y)$ van nul verschillen. Noemt men dan z de bij dien coëfficiënt behoorende veranderlijke, dan zou, indien men alle overige veranderlijken op x_1' na gelijk aan nul stelde, het eerste lid van (12) van den vorm

$$a x_1' z + b z^2$$

worden, en men zou slechts aan z eene waarde behoeven te geven, die $a z$ positief maakt, en aan x_1' eene waarde, die grooter dan $\left|\frac{b}{a} z\right|$ is, om iets positiefs te verkrijgen, terwijl, indien men z slechts juist kiest, aan

$$x_1'^2 + z^2 = 1$$

voldaan blijft.

Met betrekking tot de veranderlijken x_2', x_3', ... kan men nu dezelfde redeneering houden en vindt dan, dat

(13) $$\mathrm{K}'(x' \mid y) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \ldots\ldots + \mathrm{R}(y)$$

is.

$\mathrm{K}'(x' \mid y)$, wat $\mathrm{K}(x)$ is, waarop eene orthogonale substitutie is uitgevoerd, is evenals deze vorm continu, hetgeen men in verband met stelling XXXI inziet, door de orthogonale substitutie op te vatten als eene samenstelling van den vorm $\mathrm{K}(x, y)$ met den vorm $\sum_{p,q=1}^{\infty} l_{pq} x_p y_q$.

In verband met deze eigenschap volgt nu, dat

$$\mathrm{K}'(x' \mid 0) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \ldots\ldots$$

ook continu is; dit heeft tengevolge, dat

$$k_1, k_2, \ldots\ldots$$

naar nul convergeeren.

Onderstel namelijk, dat de k's niet naar nul convergeerden, dan was er minstens ééne waarde p ($p \neq 0$) te vinden, waarin k_1, k_2, ... zich ophoopten, en zouden er dus oneindig vele termen uit k_1, k_2, ... gekozen kunnen worden, die minder van p verschilden dan eene willekenrig kleine grootheid ε; noem die reeks termen

(14) $$k'_1, k'_2, k'_3, \ldots\ldots$$

Voor elk dezer termen k'_q geldt dan de ongelijkheid

$$p - \varepsilon < k'_q < p.$$

Neemt men nu alle waarden van x_1, x_2, ... nul, behalve die, welke behooren bij de coëfficiënten (14), dan verkrijgt men de reeks

$$k'_1 x''^2_1 + k'_2 x''^2_2 + \ldots\ldots$$

Door in deze reeks voor elken coëfficiënt $p - \varepsilon$ te nemen, maakt men de som zeker niet grooter en aangezien $\sum x_p''^2 \leqq 1$ is, zou men het zoo kunnen inrichten, dat de waarden van x''_1, x''_2, ... naar nul convergeerden, terwijl toch de reeks $K'(x' \mid 0)$ eene van nul verschillende waarde bleef behouden, iets wat zou strijden tegen de volkomen continuïteit van $K'(x' \mid 0)$.

Het is deze eigenschap der grootheden

$$k_1, k_2, \ldots\ldots,$$

die ons in staat zal stellen om aan te toonen, dat $R(y)$ in vergelijking (13) gelijk aan nul is; om dit te bewijzen, denkt men zich een waardesysteem

$$y_1 = m_1, \; y_2 = m_2, \; \ldots\ldots$$

waarvoor zou gelden, dat

$$R(m) > 0$$

is; zeker zou men dan eene waarde van q kunnen bepalen zoo, dat

$$R(m) > k_q$$

wordt.

Men zou dus voor

$$x_1' = 0, \; x_2' = 0, \; \ldots\ldots \; y = m_1, \; y = m_2, \; \ldots\ldots$$

den vorm $K'(x' \mid y)$ grooter dan k_p kunnen krijgen, de vergelijkingen

$$L_1(x) = 0, \; L_1(x) = 0, \; \ldots\ldots, \; M_1(x) = m_1, \; M(x) = m_2, \; \ldots\ldots$$

zouden dus een waardesysteem van de veranderlijken x_1, x_2, ... bepalen, waarvoor de betrekkingen

$$L_1(x) = 0, \; \ldots\ldots, \; L_{q-1}(x) = 0$$

vervuld zijn en waarvoor bovendien $K > k_p$ uitvalt; dit nu is in strijd met de definitie van k_p, zoodat $R(y)$ zeker niet positief is en aangezien

$$K'(0 \mid y) = R(y)$$

is, is wegens het positief definiet zijn van den vorm $K(x)$ ook $R(y)$ niet negatief, waaruit volgt, dat

$$R(y) \equiv 0$$

is.

Er is dus aangetoond, dat voor een continuen en positief definiet kwadratischen vorm, de betrekking

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \ldots\ldots$$

geldt.

Onderstelt men nu niet, dat $K(x)$ positief definiet is, dan komt men volgens het eerste gedeelte van de redeneering, welke hierboven gehouden is, tot de betrekking

(15) $$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + \ldots\ldots + R(y).$$

Wij weten, dat $R(y)$ niet positief kan zijn, $-R(y)$ is dus zeker positief definiet en kan dus, blijkens het voorgaande, geschreven worden als eene som van kwadraten van lineaire vormen; bijgevolg $K(x)$ ook.

Aangetoond moet nu echter nog worden, dat, wanneer men op $R(y)$ eene orthogonale substitutie uitvoert, m. a. w., wanneer men voor $R(y)$

$$(16) \qquad \varkappa_1 l_1^2(y) + \varkappa_2 l_2^2(y) + \varkappa_3 l_3^2(y) + \ldots\ldots$$

schrijft, deze lineaire vormen $l_1(y)$, $l_2(y)$, ... orthogonaal zijn ten opzichte van de lineaire vormen $L_1(x)$, $L_2(x)$, ...

Uit (15) en (16) volgt, dat

$$(17)\ K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + k_3 x_3' + \ldots\ldots + \varkappa_1 l_1^2(y) + \varkappa_2 l_2^2(y) + \ldots\ldots$$

is; x_n' is zeker voor elke waarde van n orthogonaal ten opzichte van alle lineaire vormen $l_1(y)$, $l_2(y)$, ..., want in deze lineaire vormen komen de x-en niet voor, maar wanneer de x-en en de l's orthogonaal zijn, dan zijn ook de lineaire vormen, die men verkrijgt na eene orthogonale substitutie orthogonaal (zie XXIII). Past men dus op het tweede lid van vergelijking (17) die orthogonale substitutie toe, waardoor die vorm zelf uit $K(x)$ is ontstaan, dan verkrijgt men

$$K(x) = k_1 L_1^2(x) + k_2 L_2^2(x) + k_3 L_3^2(x) + \ldots\ldots + \varkappa_1 l_1^2(M(x)) + \\ + \varkappa_2 l_2^2 M(x)) + \ldots,$$

waarmede de orthogonaliteit van de lineaire vormen L en l bewezen is.

§ 2. Oneindig vele lineaire vergelijkingen met oneindig vele onbekenden.

In hoofdstuk I, § 2 is een systeem van oneindig vele vergelijkingen met oneindig vele onbekenden ter sprake gekomen; er is toen zonder meer aangenomen, dat het systeem van vergelijkingen eene oplossing toelaat. In deze paragraaf zullen wij de voorwaarden nagaan, waaraan voldaan moet worden, opdat een zoodanig systeem oplosbaar is.

Is $A(x, y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$ *een continue bilineaire vorm van de oneindig vele veranderlijken* $x_1, x_2, \ldots\ldots, y_1, y_2, \ldots\ldots$, *dan hebben óf de oneindig vele vergelijkingen*

$$\begin{aligned} (1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots &= a_1, \\ a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots &= a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

voor alle grootheden $a_1, a_2, \ldots\ldots$, *waarvoor de som der kwadraten convergeert, een bepaald oplossingssysteem* $x_1, x_2, \ldots\ldots$ $\left(\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 \text{ convergent}\right)$, *óf de homogene vergelijkingen*

$$\begin{aligned} (1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots &= 0, \\ a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

laten eene zoodanige oplossing $x_1, x_2, \ldots\ldots$ *toe, dat* $\sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = 1$ *is.*

Om deze stelling te bewijzen beschouwe men een systeem van n vergelijkingen met n onbekenden

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots\ldots + b_{1n}x_n = b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots\ldots + b_{nn}x_n = b_n,$$

waarvan de derterminant niet nul is.

Zijn $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ de oplossingen van deze vergelijkingen, dan is

$$(b_{11}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{1n}\beta_n)^2 + \ldots\ldots + (b_{n1}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{nn}\beta_n)^2$$
$$= b_1(b_{11}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{1n}\beta_n) + \ldots\ldots + b_n(b_{n1}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{nn}\beta_n)$$
$$= \beta_1(b_1 b_{11} + \ldots\ldots + b_n b_{n1}) + \ldots\ldots + \beta_n(b_1 b_{1n} + \ldots\ldots + b_n b_{nn}),$$

en geldt dus, in verband met stelling I van hoofdstuk II, de ongelijkheid

(1) $$(b_{11}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{1n}\beta_n)^2 + \ldots\ldots + (b_{n1}\beta_1 + \ldots\ldots + b_{nn}\beta_n)^2 \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(\beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2)\{(b_{11}b_1 + \ldots + b_{n1}b_n)^2 + \ldots + (b_{1n}b_1 + \ldots + b_{nn}b_n)^2\}}$$

Zij nu m het mininum van den kwadratischen vorm

$$(b_{11}x_1 + \ldots\ldots + b_{1n}x_n)^2 + \ldots\ldots + (b_{n1}x_1 + \ldots\ldots + b_{nn}x_n)^2$$

onder voorwaarde, dat $x_1^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = 1$ is, en M het maximum van

$$(b_{11}x_1 + \ldots\ldots + b_{n1}x_n)^2 + \ldots\ldots + (b_{1n}x_1 + \ldots\ldots + b_{nn}x_n)^2$$

onder dezelfde voorwaarde.

Voor het eerste lid van ongelijkheid (1) laat zich

$$\left\{\left(b_{11}\frac{\beta_1}{\sqrt{(\beta,\beta)_n}} + \ldots\ldots + b_{1n}\frac{\beta_n}{\sqrt{(\beta,\beta)_n}}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(b_{n1}\frac{\beta_1}{\sqrt{(\beta,\beta)_n}} + \ldots\ldots + b_{nn}\frac{\beta_n}{\sqrt{(\beta,\beta)_n}}\right)^2\right\}(\beta,\beta)_n$$

schrijven; hierin is hetgeen tusschen $\}\{$ staat zeker $\geqq m$.

Voor

$$(b_{11}b_1 + \ldots\ldots + b_{n1}b_n)^2 + \ldots\ldots + (b_{1n}b_1 + \ldots\ldots + b_{nn}b_n)^2$$

kan men

$$\left\{\left(b_{11}\frac{b_1}{\sqrt{(b,b)_n}} + \ldots\ldots + b_{n1}\frac{b_n}{\sqrt{(b,b)_n}}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(b_{1n}\frac{b_1}{\sqrt{(b,b)_n}} + \ldots\ldots + b_{nn}\frac{b_n}{\sqrt{(b,b)_n}}\right)^2\right\}(b,b)_n$$

schrijven, en hetgeen nu tusschen $\}\{$ staat is $\leqq$ M, zoodat volgens (1)

$$m(\beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2) \leqq \sqrt{\beta_1^2 + \ldots + \beta_n^2}\sqrt{M(b_1^2 + \ldots + b_n^2)}$$

wordt, waaruit volgt, dat

$$\beta_1^2 + \ldots\ldots + \beta_n^2 \leqq \frac{M}{m^2}(b_1^2 + \ldots\ldots + b_n^2)$$

is.

Wij zullen dit resultaat toepassen op de vergelijkingen

$$(1 + a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = a_1,$$
(2) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + (1 + a_{nn})x_n = a_n,$$

Het minimum van den kwadratischen vorm

$$((1 + a_{11})x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n)^2 + \ldots\ldots + (a_{n1}x_1 + \ldots\ldots + (1 + a_{nn})x_n)^2$$

heete m_n en het maximum van den vorm

$$((1 + a_{11})\, x_1 + \ldots\ldots + a_{n1}\, x_n)^2 + \ldots\ldots + (a_{1n}\, x_1 + \ldots\ldots + (1 + a_{nn})\, x_n)^2$$

M_n, beide onder de voorwaarde $(x, x)_n = 1$.

In het volgende bewijs speelt de kwadratische vorm

$$((1 + a_{11})\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \ldots\ldots)^2 + (a_{12}\, x_1 + (1 + a_{22})\, x_2 + \ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots$$

eene belangrijke rol; wij zullen aantoonen, dat zij begrensd is.

Daartoe merke men op, dat zij in den vorm

$$(x, x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} x_p \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp}\, x_r + \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p \right\}^2$$

geschreven kan worden; hierin is (x, x) uiteraard begrensd, $\sum_{p=1}^{\infty} x_p \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp}\, x_r$ is $A(x, x)$ en dus, volgens onderstelling, eveneens begrensd, en

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p \right\}^2$$

is de samenstelling van $A(x, x)$ met zichzelf en derhalve ook begrensd.

De maxima M_n van den kwadratischen vorm blijven dus beneden een van n onafhankelijk getal M.

Wat de minima m_n van den kwadratischen vorm betreft, kan men twee gevallen onderscheiden:

1e Geval. Er zijn oneindig vele waarden van n, waarvoor de minima m_n boven eene vaste positieve grootheid liggen; voor al die waarden van n zijn de vergelijkingen (2) oplosbaar, want indien m_n niet nul is, kunnen de n vergelijkingen, zonder tweede lid geene oplossing hebben, waaruit volgt, dat de determinant niet 0 is, dus de oorspronkelijke vergelijkingen, met tweede lid, wel eene oplossing hebben.

Uit de ongelijkheid

$$\beta_1^2 + \ldots\ldots + \beta_n^2 \leqq (b_1^2 + \ldots\ldots + b_n^2) \frac{M}{m^2}$$

volgt, dat de som van de kwadraten der oplossingen van elk stel vergelijkingen (2) beneden de van n onafhankelijke grootheid

$$(a, a) \frac{M}{m^2}$$

ligt.

Duiden wij nu de oplossing van (2) door

$$\alpha_1^{(n)}, \ldots\ldots, \alpha_n^{(n)}$$

aan. Geeft men n achtereenvolgens alle geheele positieve waarden, dan hebben wij te doen met oneindig vele stelsels van oplossingen, dus ook met een oneindig aantal $\alpha_1^{(n)}$'s; deze oneindige reeks $\alpha_1^{(n)}$'s bezit een ophoopingspunt α_1.

Kiezen wij nu uit die $\alpha_1^{(n)}$'s, eene rij

$$\begin{matrix} \alpha_1^{(1,1)} \\ \alpha_1^{(1,2)} \\ \alpha_1^{(1,3)} \\ \vdots \\ (\text{limiet } \alpha_1) \end{matrix} \tag{3}$$

met den limiet α_1, dan komt hiermede in de rij der $\alpha_2^{(n)}$'s eene onderrij

$$\begin{matrix} \alpha_2^{(1,1)} \\ \alpha_2^{(1,2)} \\ \vdots \end{matrix}$$

overeen. Deze zal in 't algemeen niet convergeeren, maar men kan er eene convergente onderrij

$$\begin{matrix} \alpha_2^{(2,1)} \\ \alpha_2^{(2,2)} \\ \alpha_2^{(2,3)} \\ \vdots \\ (\text{limiet } \alpha_2) \end{matrix}$$

uit kiezen. De hiermede overeenkomende rij der α_1's is, als onderrij van (3), convergent. Nu convergeeren de $\alpha_3^{(n)}$'s wellicht nog niet; kies er de convergente rij

$$\begin{matrix} \alpha_3^{(3,1)} \\ \alpha_3^{(3,2)} \\ \vdots \\ (\text{limiet } \alpha_3) \end{matrix}$$

uit, enz. Zoo voortgaande verkrijgt men

$$\begin{matrix} \alpha_1^{(p,1)} & \alpha_2^{(p,1)} & \cdots & \alpha_p^{(p,1)} \\ \alpha_1^{(p,2)} & \alpha_2^{(p,2)} & \cdots & \alpha_p^{(p,2)} \\ \alpha_1^{(p,3)} & \alpha_2^{(p,3)} & \cdots & \alpha_p^{(p,3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\text{limiet } \alpha_1) & (\text{limiet } \alpha_2) & & (\text{limiet } \alpha_p) \end{matrix}$$

De vertikale rijen van het schema

$$\begin{matrix} \alpha_1^{(1,1)}, & \alpha_2^{(1,1)}, & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(2,2)}, & \alpha_2^{(2,2)}, & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(3,3)}, & \alpha_2^{(3,3)}, & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \\ (\text{limiet } \alpha_1) & (\text{limiet } \alpha_2) & & \end{matrix}$$

zijn convergent, want algemeen is de rij $\alpha_n^{(1,1)}, \alpha_n^{(2,2)}, \ldots\ldots$ convergent, omdat de na $\alpha_n^{(n,n)}$ komende elementen alle tot eene convergente rij (nl. $\alpha_n^{(n,1)}, \alpha_n^{(n,2)}, \ldots\ldots$) behooren. Noemt men den index (h, h) algemeen n_h, dan wordt dus

$$\alpha_1 = \lim \alpha_1^{(n_h)}, \quad \alpha_2 = \lim \alpha_2^{(n_h)}, \ldots\ldots$$

De som der kwadraten van α_1, α_2, enz. is eveneens kleiner dan

$$(a, a)\frac{M}{m^2},$$

daar voor alle waarden van n_h en n

$$(\alpha_1^{(n_h)})^2 + (\alpha_2^{(n_h)})^2 + \ldots . + (\alpha_n^{(n_h)})^2 < (a, a)\frac{M}{m^2}$$

en mitsdien voor alle n

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots . + \alpha_n^2 < (a, a)\frac{M}{m^2}$$

is, zoodat inderdaad

$$(\alpha, \alpha) < (a, a)\frac{M}{m^2}$$

wordt. Daar de lineaire vorm

$$a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \ldots\ldots$$

continu is, moeten bovendien de waarden

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$$

aan de vergelijking

$$a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \ldots\ldots + (1 + a_{pp}\, x_p) + \ldots\ldots = a_p$$

voldoen.

2e Geval. Onderstel, dat, wanneer n onbepaald toeneemt, de minima m_n van

$$((1 + a_{11})\, x_1 + \ldots . + a_{1n}\, x_n)^2 + \ldots . + (a_{n1}\, x_1 + \ldots . + (1 + a_{nn})\, x_n)^2$$

naar nul convergeeren (ondersteld is weer, dat $\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = 1$ is). Laten

$$\mu_1^{(n)}, \ldots\ldots, \mu_n^{(n)}$$

de waarden der veranderlijken zijn, waarvoor dat minimum bereikt wordt, dan is, daar

$$((1 + a_{11})\, x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}\, x_n)^2 + \ldots\ldots + (a_{n1}\, x_1 + \ldots\ldots + (1 + a_{nn})\, x_n)^2 =$$
$$= A_n(\cdot, x)\, A_n(\cdot, x) + 2\, A_n(x, x) + (x, x)_n$$

is,

$$(4) \qquad A_n(\cdot, \mu^{(n)})\, A_n(\cdot, \mu^{(n)}) + 2 A_n(\mu^{(n)}, \mu^{(n)}) + 1 = m_n.$$

Daar voor alle waarden van n

$$(\mu^{(n)}, \mu^{(n)}) = 1$$

is, is het stelsel van alle $\mu_p^{(n)}$ begrensd, en kunnen wij mitsdien, op de bekende wijze, eene reeks van geheele positieve getallen

$$n_1, n_2, \ldots\ldots, n_h, \ldots\ldots$$

vinden, zoo, dat de grenswaarden

$$\lim_{h=\infty} \mu_1^{(n_h)} = \mu_1, \lim_{h=\infty} \mu_2^{(n_h)} = \mu_2, \ldots\ldots$$

alle bestaan; en men ziet gemakkelijk in, dat weer

(5) $$(\mu, \mu) \leqq 1$$

wordt. Gaat men nu in de uit (4) volgende betrekking

$$A_{n_h}(\cdot, \mu^{(n_h)}) A_{n_h}(\cdot, \mu^{(n_h)}) + 2A_{n_h}(\mu^{(n_h)}, \mu^{(n_h)}) + 1 = m_{n_h}$$

tot den limiet voor $h = \infty$ over, dan vindt men

(6) $$A(\cdot \mu) A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + 1 = 0.$$

Want ten eerste is, als men onder $\mu_p^{(q)}$ voor $p > q$ nul verstaat,

$$\lim_{h=\infty} A_{n_h}(\mu^{(n_h)}, \mu^{(n_h)}) = \lim_{h=\infty} A(\mu^{(n_h)}, \mu^{(n_h)}) = A(\mu, \mu),$$

omdat $A(x, x)$ volkomen continu verondersteld is; en ten tweede convergeert $A(\cdot, \mu^{(n_h)}) A(\cdot, \mu^{(n_h)})$ voor $\lim n = \infty$ volgens XXIX naar $A(\cdot, \mu) A(\cdot, \mu)$.

Daar nu

$$A(\cdot, \mu) A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + (\mu, \mu) =$$
$$= (1 + a_{11}) \mu_1 + \ldots\ldots + a_{1n} \mu_n)^2 + \ldots\ldots + (a_{n1} \mu_1 + \ldots\ldots + (1 + a_{nn}) \mu_n)^2$$

en mitsdien grooter dan of gelijk aan nul is, leert (6), dat

$$(\mu, \mu) \geqq 1$$

moet zijn, hetgeen in verband met (5)

$$(\mu, \mu) = 1$$

geeft. Daardoor gaat (6) over in

$$A(\cdot, \mu) A(\cdot, \mu) + 2A(\mu, \mu) + (\mu, \mu) = 0$$

of ook

$$\{(1 + a_{11}) \mu_1 + a_{12} \mu_2 + \ldots\}^2 + \ldots + \{a_{n1} \mu_1 + a_{n2} \mu_2 + \ldots\}^2 + \ldots = 0,$$

hetgeen leert, dat

$$\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots$$

de vergelijkingen

$$(1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots = 0,$$
$$a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oplossen.

Hiermede is aangetoond, dat men steeds in een van de twee volgende gevallen verkeert:

1e Voor alle waarden van $a_1, a_2, \ldots\ldots$ waarvoor $\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2$ convergent is, hebben de inhomogene vergelijkingen eene oplossing,

2e De homogene vergelijkingen hebben eene oplossing $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots$ en $(\mu, \mu) = 1$.

Wij zullen nu bewijzen, dat deze gevallen elkaar uitsluiten, m. a. w., dat, indien de homogene vergelijkingen eene oplossing hebben, er a_p's kunnen gevonden worden, zoo, dat (a, a) convergeert en de inhomogene vergelijkingen geene oplossing hebben. Immers, stel, de homogene ver-

gelijkingen hebben eene oplossing $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots$ en $(\mu, \mu) = 1$. Daar, indien $(x, x) = 1$ is,

$$\{(1 + a_{11}) x_1 + a_{21} x_2 + \ldots\} \mu_1 + \{a_{12} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\} \mu_2 + \ldots \equiv$$
$$\equiv \{(1 + a_{11}) \mu_1 + a_{12} \mu_2 + \ldots\} x_1 + \{a_{21} \mu_1 + (1 + a_{22}) \mu_2 + \ldots\} x_2 + \ldots \equiv 0$$

is, kunnen de vergelijkingen

$$\begin{array}{l} (1 + a_{11}) x_1 + a_{21} x_2 + \ldots\ldots = a_1, \\ a_{12} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

geene oplossing hebben, indien niet

$$a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \ldots\ldots = 0$$

is, en voor die vergelijkingen verkeert men dus in het tweede geval. Daar mitsdien de homogene vergelijkingen

$$\begin{array}{l} (1 + a_{11}) x_1 + a_{21} x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ a_{12} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

eene oplossing hebben, waarvoor $(x, x) = 1$ is, volgt op analoge wijze, dat de vergelijkingen

$$\begin{array}{l} (1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots = a_1, \\ a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

niet voor alle a_p oplossingen kunnen hebben, en dit is het, wat bewezen moest worden.

Indien men in het eerste geval verkeert, kunnen de inhomogene vergelijkingen slechts één stel oplossingen hebben, daar anders bij twee stellen oplossingen het verschil aan de homogene vergelijkingen voldoen zou (door met eenen geschikten factor te vermenigvuldigen zou de som der kwadraten weer één worden) en men dus in het tweede geval zou verkeeren. Is men in het tweede geval, dan kunnen de inhomogene vergelijkingen wellicht voor sommige, misschien wel oneindig vele stellen a_p's eene of meer oplossingen hebben, en ook is het de vraag, of de homogene vergelijkingen zelve niet meer dan één oplossingssysteem hebben. Dit zullen we nu nagaan; de in § 1 van dit hoofdstuk bewezen stelling zal ons daarbij van nut zijn.

De oplossingen der homogene vergelijkingen

$$\begin{array}{l} L_1(x) \equiv (1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ L_2(x) \equiv a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{7}$$

zijn die waarden $x_1, x_2, \ldots\ldots$, die den vorm

$$((1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots)^2 + (a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots)^2 + \ldots \equiv$$
$$\equiv A(\cdot, x) A(\cdot, x) + 2A(x, x) + (x, x) \tag{8}$$

nul maken. Daar de vorm

$$A(\cdot, x) A(\cdot, x) + 2A(x, x)$$

als som van twee volkomen continue vormen zelve volkomen continu is,

kan hij, volgens § 1 van dit hoofdstuk, na eene orthogonale substitutie, in de gedaante

$$k_1 x'^2_1 + k_2 x'^2_2 + k_3 x'^2_3 + \ldots\ldots$$

worden geschreven. Hierin zijn de k's getallen, die zich bij nul, en alleen bij nul, verdichten, en er kunnen ook niet oneindig vele k's gelijk zijn, omdat dan, indien men de niet bij die k's behoorende x'-en nul stelde, er iets van den vorm

$$k\,(x'^2_{n1} + x'^2_{n2} + \ldots\ldots)$$

zoude komen, hetgeen niet volkomen continu is. In het bijzonder is er dus slechts een eindig aantal k's, dat -1 is; zij e dat aantal. Voor (8) kan men schrijven

$$(1 + k_1)\,x'^2_1 + (1 + k_2)\,x'^2_2 \ldots\ldots$$

en in deze reeks zijn dus e coëfficiënten nul, stel de eerste e; men heeft dus

$$((1 + a_{11})\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots)^2 + (a_{21}\,x_1 + (1 + a_{22})\,x_2 + \ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots = \\ = k_{e+1}\,x'^2_{e+1} + k_{e+2}\,x'^2_{e+2} + \ldots\ldots,$$

en daar de vorm steeds positief is, zijn

$$k_{e+1},\ k_{e+2},\ \ldots\ldots$$

alle positief. Eene oplossing

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots$$

der vergelijkingen (7) maakt dezen vorm nul en voldoet dus aan

$$x'_1 = u_1;\ \ldots\ldots,\ x'_e = u_e,\ x'_{e+1} = x'_{e+2} = \ldots\ldots = 0,$$

waarin $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_e$ willekeurig zijn. Er zijn dus juist e lineair onafhankelijke oplossingssystemen van (7).

Laat nu f het aantal lineair onafhankelijke identiteiten

$$(9) \qquad \beta_1^{(h)}\,L_1(x) + \beta_2^{(h)}\,L_2(x) + \ldots\ldots \equiv 0 \qquad (h = 1, \ldots\ldots, f)$$

zijn, die er wellicht tusschen $L_1(x)$, $L_2(x)$, enz. bestaan.

Wij zullen nu bewijzen, dat

$$f = e$$

moet zijn. Stel, dat $f > e$ ware.

Alle oplossingssystemen van de vergelijkingen (7) worden gegeven door

$$x'_1 = u_1,\ \ldots\ldots,\ x'_e = u_e, \qquad x'_{e+1} = x'_{e+2} = \ldots\ldots = 0$$

of, voluit geschreven, door de vergelijkingen

$$(10) \qquad \begin{array}{l} l_{11}\,x_1 + l_{12}\,x_2 + l_{13}\,x_3 + \ldots\ldots = u_1, \\ l_{21}\,x_1 + l_{22}\,x_2 + l_{23}\,x_3 + \ldots\ldots = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{e1}\,x_1 + l_{e2}\,x_2 + l_{e3}\,x_3 + \ldots\ldots = u_e, \\ l_{e+1,1}\,x_1 + l_{e+1,2}\,x_2 + l_{e+1,3}\,x_3 + \ldots\ldots = 0 \end{array}$$

Wij weten uit § 1 van dit hoofdstuk, dat de l's orthogonaal zijn ten opzichte van elkaar en wij kunnen dus x_p vinden, door de vergelijkingen (10) achtereenvolgens met l_{1p}, l_{2p}, enz. te vermenigvuldigen en dan bij elkaar op te tellen; men vindt zoo

$$
(11) \quad
\begin{aligned}
x_1 &= l_{11}\, u_1 + l_{21}\, u_2 + \ldots\ldots + l_{e1}\, u_e, \\
x_2 &= l_{12}\, u_1 + l_{22}\, u_2 + \ldots\ldots + l_{e2}\, u_e, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_p &= l_{1p}\, u_1 + l_{2p}\, u_2 + \ldots\ldots + l_{ep}\, u_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

In dezen vorm geschreven, ziet men duidelijk dat er inderdaad e lineair onafhankelijke oplossingssystemen zijn.

Het is nu mogelijk, om uit de waarden x_1, x_2, ... er e zoodanig te kiezen, dat de vergelijkingen (7) geen oplossingssysteem bezitten, waarvoor die e uitgekozen x-en nul zijn; dit zal kunnen, indien er minstens één determinant van de e-de orde in de l's uit de rechterleden der vergelijkingen (11) is te vormen, die niet nul is; dat dit zoo is, toone men als volgt aan.

Noem de e determinanten van de $(e-1)$-ste orde, gevormd door de coëfficiënten l uit de eerste $(e-1)$ vergelijkingen van (11), achtereenvolgens

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_e$$

met de teekens, waarmee ze voorkomen in de ontwikkeling van

$$
\begin{vmatrix}
l_{11} & l_{21} & \ldots\ldots & l_{e1} \\
l_{12} & l_{22} & \ldots\ldots & l_{e2} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
l_{1e} & l_{2e} & \ldots\ldots & l_{ee}
\end{vmatrix}
$$

naar de elementen der laatste rij. Waren nu alle determinanten van de e-de orde uit het schema

$$
\begin{matrix}
l_{11} & l_{21} & \ldots\ldots & l_{e1}, \\
l_{12} & l_{22} & \ldots\ldots & l_{e2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
l_{1p} & l_{2p} & \ldots\ldots & l_{ep}, \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots
\end{matrix}
$$

nul, dan zouden de betrekkingen

$$
\begin{aligned}
l_{11}\, A_1 + l_{21}\, A_2 + \ldots\ldots + l_{e1}\, A_e &= 0, \\
l_{12}\, A_1 + l_{22}\, A_2 + \ldots\ldots + l_{e2}\, A_e &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
l_{1p}\, A_1 + l_{2p}\, A_2 + \ldots\ldots + l_{ep}\, A_e &= 0
\end{aligned}
$$

gelden, waaruit men zou vinden door de e vergelijkingen

$$(12)\qquad \begin{array}{l} l_{11}\, x_1 + l_{12}\, x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ l_{21}\, x_1 + l_{22}\, x_2 + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{e1}\, x_1 + l_{e2}\, x_2 + \ldots\ldots = 0 \end{array}$$

respectievelijk met A_1, $A_2 \ldots\ldots$, A_e te vermenigvuldigen en de resultaten op te tellen, dat het geheele rechterlid weg valt, wat in strijd ware met de lineaire onafhankelijkheid der vergelijkingen (12).

Op overeenkomstige wijze, als men bewijst, dat men e x-en uit kan kiezen, zóó dat de homogene vergelijkingen

$$\begin{array}{l} L_1 (x) = 0, \\ L_2 (x) = 0, \\ \ldots\ldots \end{array}$$

geene oplossing toelaten, waarin de e x-en nul zijn, kan men ook aantoonen, dat er altijd e lineaire vormen $L(x)$ in de overige L's kunnen worden uitgedrukt.

Tusschen deze vormen $L'_1 (x), L'_2 (x), \ldots\ldots$ bestaat dan nog minstens eene lineaire betrekking

$$(13a)\qquad \beta_1\, L'_1 (x) + \beta_2\, L'_2 (x) + \ldots\ldots = 0,$$

omdat $f > e$ is en de betrekkingen lineair onafhankelijk ondersteld zijn. De som van de kwadraten dezer β's is weer eindig.

Laten nu $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_e$ de e bovenbepaalde x-en en $L_1 (x), L_2 (x), \ldots\ldots$, $L_e (x)$ de e uitgezochte L's zijn. De veranderlijken $x_{e+1}, x_{e+2}, \ldots\ldots$ noeme men $x'_1, x'_2, \ldots\ldots$ en de vormen $L_{e+1} (x'), L_{e+2} (x'), \ldots\ldots$ geve men door

$$L'_1 (x'), L'_2 (x'), \ldots\ldots$$

aan. Tenslotte bepale men de grootheden a_1, $a_2, \ldots\ldots$ zoodanig, dat de som der kwadraten eindig en

$$(13b)\qquad \beta_1\, a_1 + \beta_2\, a_2 + \ldots\ldots \neq 0$$

is.

Met deze grootheden a_1, $a_2, \ldots\ldots$ en de lineaire vormen $L'_1 (x')$, $L'_2 (x'), \ldots\ldots$ stelle men het stelsel vergelijkingen

$$(14)\qquad \begin{array}{l} L'_1 (x') = a_1, \\ L'_2 (x') = a_2, \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{array}$$

op.

Dit stelsel is van denzelfden vorm als het oorspronkelijke stelsel, d. w. z. de eerste leden dezer vergelijkingen hebben denzelfden vorm als die der vergelijkingen (7). Om dit in te zien, bedenke men, dat de lineaire vormen $L_1 (x)$, $L_2 (x) \ldots\ldots$ de coëfficiënten der y's in den bilineairen vorm

$$(15)\qquad (x, y) + A (x, y)$$

zijn. De vormen $L'_1 (x'), L'_2 (x'), \ldots\ldots$ zijn evenzoo de coëfficiënten van $y'_1, y'_2, \ldots\ldots$ in den bilineairen vorm

(16) $$y'_1 \, L'_1(x') + y'_2 \, L'_2(x') + \ldots\ldots$$

en deze vorm wordt uit den vorigen verkregen, door $x_1 = x_2 = \ldots = x_e = y_1 = y_2 = \ldots\ldots = y_e = 0$ te stellen. Daardoor ontstaat echter uit (15) de som van twee bilineaire vormen, één uit (x, y) nl. (x', y') en één uit $A(x, y)$, die evenals $A(x, y)$ volkomen continu is en $A'(x', y')$ moge heeten. Dan blijkt dus (16) in

$$(x', y') + A'(x', y')$$

over te gaan, hetgeen weer van den vorm van (15) is. Men kan dus besluiten, dat òf de vergelijkingen

$$L'_1(x') = 0, \quad L'_2(x') = 0, \ldots\ldots,$$

òf de vergelijkingen

$$L'_1(x') = a_1, \quad L'_2(x') = a_2, \ldots\ldots$$

eene oplossing moeten hebben. Het eerste is onmogelijk, daar het zou beteekenen, dat de vergelijkingen

$$L_1(x) = 0, \quad L_2(x) = 0, \ldots\ldots$$

eene oplossing hadden, waarbij $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_e = 0$ ware; en het tweede zou met (13*a*) en (13*b*) in strijd komen. Het blijkt dus, dat de onderstelling $f > e$ onhoudbaar is.

Eene beschouwing der getransponeerde vergelijkingen

$$\begin{array}{l} (1 + a_{11}) x_1 + a_{21} x_2 + \ldots\ldots = 0 \\ a_{12} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

leert, dat f ook niet kleiner dan e kan zijn; e is het aantal onafhankelijke oplossingssystemen der vergelijkingen (7) en f het aantal lineair onafhankelijke betrekkingen

$$\beta_1^{(h)} L_1(x) + \beta_2^{(h)} L_2(x) + \ldots\ldots = 0,$$

welke, als men ze uitschrijft, de volgende gedaante aannemen

$$\beta_1^{(h)} \{(1 + a_{11}) x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\} + \beta_2^{(h)} \{a_{21} x_1 + (1 + a_{22}) x_2 + \ldots\ldots\} + \\ + \ldots\ldots = 0.$$

Rangschikt men het eerste lid naar de veranderlijken $x_1, x_2, \ldots\ldots$, dan vindt men

$$x_1 \{(1 + a_{11}) \beta_1^{(h)} + a_{21} \beta_2^{(h)} + \ldots\ldots\} + x_2 \{a_{12} \beta_1^{(h)} + (1 + a_{22}) \beta_2^{(h)} + \ldots\ldots\} + \\ + \ldots\ldots = 0;$$

aangezien deze betrekking indentiek in de $x_1, x_2, \ldots\ldots$ geldt, moet dus

$$\begin{array}{l} (1 + a_{11}) \beta_1^{(h)} + a_{21} \beta_2^{(h)} + \ldots\ldots = 0, \\ a_{12} \beta_1^{(h)} + (1 + a_{22}) \beta_2^{(h)} + \ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

zijn. Wij zien dus, dat de $\beta_1^{(h)}, \beta_2^{(h)}, \ldots\ldots$ tezamen een oplossingssysteem vormen van de getransponeerde vergelijkingen; de f lineaire betrekkingen tusschen de oorspronkelijke lineaire vormen leveren dus f oplossingssystemen van de getransponeerde vergelijkingen. Eveneens vindt men dan ook, dat de e oplossingssystemen van de oorspronkelijke homogene vergelijkingen e lineaire betrekkingen leveren tusschen de getrans-

poneerde vormen. Past men nu de beschouwingen, die hierboven op de oorspronkelijke homogene vergelijkingen zijn gehouden, op de getransponeerde homogene vergelijkingen toe, dan vindt men, dat evenmin $f < e$ kan zijn en bijgevolg $f = e$ is.

Ten slotte moet men nog nagaan, in welk geval de inhomogene vergelijkingen

$$(17)\qquad \begin{array}{l} L_1(x) = (1 + a_{11})\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots = a_1, \\ L_2(x) = a_{21}\, x_1 + (1 + a_{22})\, x_2 + \ldots\ldots = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

een oplossingssysteem hebben, wanneer de homogene vergelijkingen e lineair onafhankelijke oplossingssystemen bezitten; hierboven is aangetoond, dat er in dat geval e betrekkingen van den vorm

$$(18a)\qquad \beta_1^{(h)} L_1(x) + \beta_2^{(h)} L_2(x) + \ldots\ldots = 0$$

bestaan, en hieruit volgt, dat het voor de oplosbaarheid der inhomogene vergelijkingen noodig is, dat

$$(18b)\qquad \beta_1^{(h)} a_1 + \beta_2^{(h)} a_2 + \ldots\ldots = 0 \qquad (h = 1, \ldots\ldots, e)$$

zijn. Dit is echter ook voldoende.

Want daar de vergelijkingen (14) voor $a_1 = 0$, $a_2 = 0, \ldots\ldots$ geen oplossingssysteem bezitten, kan het niet anders, of de vergelijkingen

$$(19)\qquad \left\{ \begin{array}{l} L'_1(x') = a'_1, \\ L'_2(x') = a'_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

laten eene oplossing toe; hierin zijn $a'_1, a'_2, \ldots\ldots$ die bekende termen uit de vergelijkingen (17), die passen bij de lineaire vormen $L_1(x)$, $L_2(x)$, welke overgebleven zijn, nadat er, door middel van de betrekkingen 18a, e uitgenomen zijn, die lineair in de overige konden worden uitgedrukt. Zij mogen dus willekeurig zijn, mits de som hunner kwadraten eindig is; de e overige a's zijn gebonden aan de betrekkingen (18b).

§ 3. Volledige stelsels van orthogonale functies.

Reeds in het overzicht is gebleken, dat tusschen de theorie der integraalvergelijkingen en die van oneindig vele vergelijkingen met oneindig vele onbekenden verband kan worden gebracht door een stelsel van oneindig vele continue functies $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s), \ldots\ldots$, die in het interval (a, b) de beide volgende eigenschappen hebben:

1°. Zij zijn *orthogonaal* (en *genormeerd*), d. i. zij voldoen aan de betrekkingen

$$\int_a^b \Phi_p(s)\, \Phi_q(s)\, ds = \left\{ \begin{array}{ll} 0, \text{ indien } p \neq q \text{ is.} \\ 1, \quad ,, \quad p = q \text{ is.} \end{array} \right.$$

2°. Zij vormen een *volledig* stelsel, d. i. voor elk tweetal continue functies $u(s)$ en $v(s)$ is

$$\int_a^b u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{p=1}^{\infty} \int_a^b u(s)\,\Phi_p(s)\,ds \cdot \int_a^b v(s)\,\Phi_p(s)\,ds.$$

Een zoodanig stelsel $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... heet *een volledig stelsel van orthogonale functies* (*voor het interval* (a, b)).

Onderstel, dat de functies $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... continu, orthogonaal en genormeerd zijn en dat, welke continue functie $u(s)$ en welk positief getal ε ook gegeven mag zijn, het steeds mogelijk is een getal m en m constanten $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m$ te vinden, zoo, dat

$$\int_a^b \left\{ u(s) - c_1\,\Phi_1(s) - c_2\,\Phi_2(s) - \ldots\ldots - c_m\,\Phi_m(s) \right\}^2 ds < \varepsilon$$

wordt. Het laat zich dan bewijzen, dat het stelsel $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ... volledig is.

Hiertoe ga men uit van de ongelijkheid

$$\int_a^b \left\{ u(s) - u_1\,\Phi_1(s) - u_2\,\Phi_2(s) - \ldots\ldots - u_n\,\Phi_n(s) \right\}^2 ds \geqq 0,$$

waarin ter bekorting

$$u_p = \int_a^b u(s)\,\Phi_p\,ds \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots)$$

gesteld is. Bij uitwerking leidt dit, ten gevolge van de orthogonaliteit van het stelsel $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, ..., tot de ongelijkheid

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ldots + u_n^2 \leqq \int_a^b \Big(u(s)\Big)^2 ds,$$

die voor alle waarden van n geldt en dus leert, dat

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ldots \leqq \int_a^b \Big(u(s)\Big)^2 ds$$

is. Het verschil

$$\Delta = \int_a^b \Big(u(s)\Big)^2 ds - u_1^2 - u_2^2 - \ldots\ldots$$

kan dus niet negatief zijn; het kan echter evenmin positief zijn. Want, volgens onderstelling, kan men constanten $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m$ vinden, zoo, dat

$$\int_a^b \left\{ u(s) - c_1\,\Phi_1(s) - c_2\,\Phi_2(s) - \ldots\ldots - c_m\,\Phi_m(s) \right\}^2 ds < \varepsilon$$

wordt, hoe klein de positieve grootheid ε ook moge zijn, en dit heeft ten gevolge, dat

$$\int_a^b \Big(u(s)\Big)^2 ds - 2c_1u_1 - 2c_2u_2 - \ldots\ldots - 2c_mu_m + c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_m^2$$

en dus ook

$$\Delta + (u_1 - c_1)^2 + (u_2 - c_2)^2 + \ldots\ldots + (u_m - c_m)^2$$

kleiner dan ε wordt; dus is ook

$$\Delta < \varepsilon,$$

hoe klein ε ook zijn mag, d. i.

$$\Delta \leqq 0$$

Bijgevolg is Δ nul, d. i.

$$\int_a^b \Big(u(s)\Big)^2 ds = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots\ldots$$

Zijn nu $u(s)$ en $v(s)$ twee continue functies, dan neme men voor $u(s)$ in deze formule eerst $u(s) + v(s)$ en dan $u(s) - v(s)$; trekt men de zoo verkregen vergelijkingen van elkaar af, dan vindt men

$$\int_a^b u(s)\, v(s)\, ds = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \ldots\ldots,$$

hetgeen leert, dat het stelsel $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots\ldots$ volledig is.

Het is nu gemakkelijk aan te toonen, dat men een *volledig* orthogonaal stelsel kan construeeren. Want zoodra men een stelsel van continue functies $P_1(s), P_2(s), \ldots\ldots$ heeft, met de eigenschap, dat bij gegeven continue $u(s)$ en positieve ε constanten $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_m$ gevonden kunnen worden, zoo, dat

$$\int_a^b \Big\{ u(s) - c_1 P_1(s) - c_2 P_2(s) - \ldots\ldots - c_m P_m(s) \Big\}^2 ds < \varepsilon$$

wordt, kan men hieruit een stelsel $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots\ldots$ met dezelfde eigenschap, en dat bovendien (genormeerd en) orthogonaal is, construeeren, en dit stelsel is dan, volgens het bewezene, volledig. Men behoeft daartoe slechts

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= \gamma_1 P_1(s), \\ \Phi_2(s) &= \gamma_2 P_2(s) + \gamma'_2 \Phi_1(s), \\ \Phi_3(s) &= \gamma_3 P_3(s) + \gamma'_3 \Phi_1(s) + \gamma''_3 \Phi_2(s), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

te stellen, en de constante γ_1 zoo te bepalen, dat $\Phi_1(s)$ genormeerd is, de constanten γ_2 en γ'_2 zoo, dat $\Phi_2(s)$ genormeerd en t. o. z. van $\Phi_1(s)$ orthogonaal is, de constanten $\gamma_3, \gamma'_3, \gamma''_3$ zoo, dat $\Phi_3(s)$ genormeerd en t. o. z. van $\Phi_1(s)$ en $\Phi_2(s)$ orthogonaal is, enz.

Dat er stelsels van functies $P_1(s), P_2(s), \ldots\ldots$ met de veronderstelde eigenschappen zijn, volgt ten slotte uit eene stelling van Weierstrass, die leert, dat men bij elke gegeven in (a, b) continue functie $u(s)$ en positieve ε een veelterm $p(s)$ kan vinden, die

$$| u(s) - p(s) | < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{b - a}$$

maakt voor alle s in (a, b). Want dan wordt

$$\int_a^b \Big\{ u(s) - p(s) \Big\}^2 ds < \varepsilon,$$

d. i.

$$\int_a^b \Big\{ u(s) - c_1 - c_2 s - c_3 s^2 - \ldots\ldots - c_m s^{m-1} \Big\}^2 ds < \varepsilon,$$

zoodat blijkt, dat men voor $P_1(s), P_2(s), P_3(s), \ldots\ldots$ de functies

$$1,\ s,\ s^2,\ \ldots\ldots$$

kan nemen.

Behalve deze stelling van Weierstrass leidt onder meer ook eene

stelling van Féjer tot het doel, nl. de stelling, die leert, dat men bij iedere continue functie $u(s)$ en iedere positieve ε een veelterm $p(s)$ in $\cos \frac{2\pi s}{b-a}$, $\sin \frac{2\pi s}{b-a}$, $\cos 2\frac{2\pi s}{b-a}$, $\sin 2\frac{2\pi s}{b-a}$, enz. kan vinden zoo, dat voor alle s in (a, b)

$$| u(s) - p(s) | < \varepsilon$$

HOOFDSTUK IV.

§ 1. Oplossing van de integraalvergelijking met asymmetrischen kern.

In de integraalvergelijking

$$f(s) = \Phi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, \Phi(t)\, dt$$

zij $\mathrm{K}(s, t)$ eene continue, niet symmetrisch ondersteldе, functie van s en t, en $f(s)$ eene continue functie van s, terwijl $\Phi(s)$ de gezochte functie is. Om deze vergelijking in verband te brengen, met een systeem van oneindig vele vergelijkingen, met oneindig vele onbekenden, vormt men door middel van den kern $\mathrm{K}(s, t)$ en een volledig stelsel van orthogonale functies $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots\ldots.$ op de volgende wijze de functies $k_q(s)$ de grootheden k_{pq}.

$$(1^a) \qquad k_q(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, \Phi_q(t)\, dt$$

$$(1^b) \qquad k_{pq} = \int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, \Phi_p(s)\, \Phi_q(t)\, dt\, ds$$

Deze grootheden k_{pq} voldoen aan de eigenschap, dat de som van hare kwadraten eindig is. Want ten eerste geldt de vergelijking

$$(2) \qquad \int_a^b \Big\{\mathrm{K}(s, t)\Big\}^2 dt = \Big(k_1(s)\Big)^2 + \Big(k_2(s)\Big)^2 + \ldots\ldots,$$

welke men verkrijgt, door in de volledigheidsbetrekking

$$\int_a^b u(t)\, v(t)\, dt = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots\ldots$$

$$u(t) = v(t) = \mathrm{K}(s, t)$$

te nemen.

Stelt men daarna in de volledigheidsbetrekking

$$u(s) = v(s) = k_q(s),$$

dan is tevens

$$(3) \qquad \int_a^b \Big(k_q(s)\Big)^2 ds = k_{1q}^2 + k_{2q}^2 + \ldots\ldots$$

Door betrekking (2) in de gedaante

$$\left(k_1(s)\right)^2 + \left(k_2(s)\right)^2 + \ldots\ldots \left(k_m(s)\right)^2 \leqq \int_a^b \left(\mathrm{K}(s,t)\right)^2 dt$$

te schrijven, en beide leden te integreeren, vindt men in verband met (3), dat

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{m} k^2_{pq} \leqq \int_a^b \int_a^b \left(\mathrm{K}(s,t)\right)^2 ds\, dt$$

is; aangezien deze ongelijkheid voor alle waarden van m geldt, mag men er ook

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} k^2_{pq} \leqq \int_a^b \int_a^b \left(\mathrm{K}(s,t)\right)^2 ds\, dt$$

voor schrijven.

De bilineaire vorm

$$\mathrm{K}(x,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}\, x_p\, y_q$$

is blijkens XXV volkomen continu in $x_1, x_2, \ldots\ldots$, en $y_1, y_2, \ldots\ldots$, waarmee aan de voorwaarde voldaan is, die vereischt wordt voor de oplosbaarheid der oneindig vele vergelijkingen

$$\begin{array}{l} (1+k_{11})\, x_1 + k_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = a_1, \\ k_{21}\, x_1 + (1+k_{22})\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{p1}\, x_2 + \ldots\ldots + (1+k_{pp})\, x_p + \ldots = a_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

waarin, voor het geval, dat de a's niet alle nul zijn, vereischt wordt, dat de som hunner kwadraten convergent is.

Neemt men voor a_p de waarde

$$f_p = \int_a^b f(s)\, \Phi_p(s)\, ds,$$

dan weet men, dat de volledigheid van het stelsel

$$\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots\ldots$$

meebrengt, dat

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots\ldots = \int_a^b \left(f(s)\right)^2 ds$$

is; de som der kwadraten convergeert derhalve.

Op het systeem vergelijkingen

$$(4) \quad \begin{array}{l} (1+k_{11})\, x_1 + k_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = f_1, \\ k_{21}\, x_1 + (1+k_{22})\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{p1}\, x_1 + \ldots\ldots + (1+k_{pp})\, x_p + . = f_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

zijn dus alle beschouwingen van toepassing, die in de tweede paragraaf van het vorige hoofdstuk gehouden zijn.

Onderstel, om te beginnen, dat men in het eerste geval verkeert,

dat dus de vergelijkingen (4) eene oplossing toelaten, die aangegeven zal worden door

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots,$$

zoodat dus

(5) $\alpha_p + k_{p1}\alpha_1 + k_{p2}\alpha_2 + \ldots\ldots = f_p \qquad (p = 1, 2, \ldots\ldots)$

is.

Met de grootheden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ en de functies $k_1(s), k_2(s), \ldots\ldots$ (1ª), vorme men de volgens XXXXI in s uniform convergente reeks

(6) $$A(s) = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \ldots\ldots$$

en met deze functie $A(s)$ de functie

(7) $$\Phi(s) = f(s) - A(s).$$

Het blijkt, dat de aldus gevormde functie $\Phi(s)$ aan de integraalvergelijking

(8) $$f(s) = \Phi(s) + \int_a^b K(s, t)\,\Phi(t)\,dt$$

voldoet; dit ziet men als volgt in.

Voor

$$\int_a^b K(s, t)\,\Phi(t)\,dt$$

laat zich namelijk, volgens de volledigheidsbetrekking,

(9) $$\Phi_1 k_1(s) + \Phi_2 k_2(s) + \Phi_3 k_3(s) + \ldots\ldots$$

schrijven, waarin $\Phi_p = \alpha_p$ is; want uit (7) volgt

$$\Phi_p = f_p - A_p$$

en wegens (6) is

$$A_p = \alpha_1 k_{p1} + \alpha_2 k_{p2} + \alpha_3 k_{p3} \ldots\ldots,$$

waarvoor men volgens (5), ook

(10) $$A_p = f_p - \alpha_p$$

mag schrijven, zoodat dus uit (6) en (7) volgt, dat

$$\Phi_p = \alpha_p$$

is.

Men heeft derhalve de betrekking

$$\int_a^b K(s, t)\,\Phi(t)\,dt = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \ldots\ldots = A(s)$$

of volgens (7)

$$\int_a^b K(s, t)\,\Phi(t)\,dt = f(s) - \Phi(s).$$

Derhalve is $\Phi(s)$ eene oplossing van integraalvergelijking (8).

Men toont eveneens gemakkelijk aan, dat als $\Phi(s)$ eene oplossing van integraalvergelijking (8) is, de grootheden $\Phi_1, \Phi_2, \ldots\ldots$ een oplossingssysteem van de vergelijkingen

$$x_p + k_{p1} x_1 + k_{p2} x_2 + \ldots\ldots = f_p \qquad (p = 1, 2 \ldots\ldots)$$

vormen, waarbij (x, x) convergeert; dat (Φ, Φ) deze laatste eigenschap bezit, leert ons weer de volledigheidsbetrekking, waaruit men bovendien tot de volgende vergelijking mag besluiten:

$$\Phi_1 k_1(s) + \Phi_2 k_2(s) + \dots\dots = \int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt = f(s) - \Phi(s),$$

Het eerste lid dezer betrekking is volgens XXXXI uniform continu in s, men mag dus met $\Phi_p(s)$ vermenigvuldigen en term voor term integreeren; men vindt aldus

$$\Phi_1 k_{p1} + \Phi_2 k_{p2} + \dots\dots = f_p - \Phi_p,$$

waaruit men dus ziet, dat $\Phi_1, \Phi_2, \dots\dots$ een oplossingssysteem is van de vergelijkingen

$$(11^a)\qquad \begin{aligned} &(1 + k_{11})\,x_1 + k_{12}\,x_2 + \dots\dots = f_1,\\ &k_{21}\,x_1 + (1 + k_{22})\,x_2 + \dots\dots = f_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Verkeeren wij in het geval, dat de homogene vergelijkingen

$$(11^b)\qquad \begin{aligned} &(1 + k_{11})\,x_1 + k_{12}\,x_2 + \dots\dots = 0,\\ &k_{21}\,x_1 + (1 + k_{22})\,x_2 + \dots\dots = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

eene oplossing toelaten, dan neme men

$$f(s) = 0, \text{ dus ook } f_1 = 0, f_2 = 0, \dots\dots$$

Voldoen dan aan de vergelijkingen (11^b) de waarden $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \dots\dots$, dan vindt men, volgens dezelfde beschouwingen, als hier boven, dat $\alpha_1 = \Phi_1$, $\alpha_2 = \Phi_2, \dots\dots$, waarin $\Phi(s)$ eene oplossing der homogene vergelijking

$$(12)\qquad \Phi(s) + \int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt = 0$$

is, en aangezien

$$\int_a^b \left(\Phi(s)\right)^2 ds = \alpha_1^2 + \alpha_1^2 + \dots\dots = 1$$

is, zal deze oplossing niet identiek nul zijn.

Omgekeerd, is $\Phi(s)$ eene oplossing der homogene integraalvergelijking (12), welke niet identiek nul is, dan vormen de grootheden $\Phi_1, \Phi_2, \dots\dots$ een oplossingssysteem van de daaruit op de bekende manier afgeleide homogene lineaire vergelijkingen.

In hoofdstuk III is aangetoond, dat, wanneer de homogene vergelijkingen (11^b) e lineair onafhankelijke oplossingen bezitten de linkerleden dezer vergelijkingen aan de e betrekkingen

$$(13)\qquad \beta_1^{(h)} L_1(x) + \beta_2^{(h)} L_2(x) \dots\dots = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots\dots, e)$$

voldoen, waarin

$$\begin{aligned} L_1(x) &= (1 + k_{11})\,x_1 + k_{12}\,x_2 + \dots\dots,\\ L_2(x) &= k_{21}\,x_1 + (1 + k_{22})\,x_2 + \dots\dots,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

is. Bij die gelegenheid is ook bewezen, dat

$$(14)\qquad x_1 = \beta_1^{(h)}, \quad x_2 = \beta_{2(h)}, \dots\dots \qquad (h = 1, 2, \dots\dots, e)$$

e oplossingssystemen vormen van de getransponeerde vergelijkingen

$$(15). \quad \begin{cases} (1 + k_{11})\, a_1 + k_{21}\, x_2 + \dots\dots = 0, \\ k_{12}\, x_1 + (1 + k_{22})\, x_2 + \dots\dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Passen wij nu op de vergelijkingen (15) en de homogene integraalvergelijking

$$(16) \qquad \psi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(t, s)\, \psi(t)\, dt = 0$$

dezelfde beschouwingen toe als hierboven op de vergelijkingen (11^b) en (12) dan vindt men, dat de grootheden (14) de Fourier-coëfficiënten zijn van e lineair onafhankelijke in s continue oplossingen van vergelijking (16), welke oplossingen wij zullen aangeven door

$$\psi^{(1)}(s),\ \psi^{(2)}(s),\ \dots\dots,\ \psi^{(e)}(s).$$

De e voorwaarden

$$(17) \qquad \beta_1^{(h)} f_1 + \beta_2^{(h)} f_2 + \dots\dots = 0, \qquad (h = 1, \dots\dots, e)$$

waaraan voldaan moet worden, opdat de vergelijkingen (11^a) eene oplossing bezitten, gaan wegens

$$\int_a^b \psi^{(h)}(s)\, f(s)\, ds = \psi_1^{(h)} f_1 + \psi_2^{(h)} f_2 + \dots\dots (h = 1, \dots\dots, e)$$

in

$$(18) \qquad \int_a^b \psi^{(1)}(s)\, f(s)\, ds = 0, \dots\dots, \int_a^b \psi^{(e)}(s)\, f(s)\, ds = 0$$

over; (17) heeft dus (18) tengevolge en omgekeerd sluit (18) (17) in.

Wij zijn dus tot de stelling gekomen, dat wanneer de homogene vergelijkingen (11^b) e lineair onafhankelijke oplossingen hebben, de homogene integraalvergelijking (12) ook e lineair onafhankelijke continue oplossingen heeft.

In dit geval hebben de inhomogene vergelijkingen (11^a) eene oplossing, wanneer aan (17) is voldaan, of wat op hetzelfde neerkomt, wanneer aan (18) is voldaan; dat de inhomogene vergelijkingen (11^a) eene oplossing bezitten, sluit echter in, dat de inhomogene integraalvergelijking

$$(19) \qquad \Phi(s) + \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, \Phi(t)\, dt = f(s)$$

eene oplossing heeft. Vatten wij de resultaten samen, dan verkrijgt men de reeds door Fredholm gevonden stelling, dat indien de homogene integraalvergelijking (12) e lineair onafhankelijke oplossingen bezit, de betrekkingen (18) de noodige en voldoende voorwaarden zijn voor de oplosbaarheid van integraalvergelijking (19); de functies $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s), \dots,$ $\psi^{(e)}(s)$ zijn oplossingen van de homogene integraalvergelijking met den getransponeerden kern $\mathrm{K}(t, s)$.

§ 2. De integraalvergelijking met symmetrische kern.

De theorie der kwadratische vormen van oneindig vele veranderlijken stelt ons ook in staat, eenige belangrijke eigenschappen af te leiden van de oplossingen der homogene symmetrische integraalvergelijkingen. De voornaamste eigenschap dezer oplossingen is wel, dat functies, welke aan zekere voorwaarden voldoen, ontwikkelbaar zijn in absoluut en uniform convergeerende reeksen, waarvan de termen uit die oplossingen zijn samengesteld, zooals dat bij de reeks van Fourier geschiedt.

Zij gegeven de integraalvergelijking

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt;$$

hierin zijn $f(s)$ en $K(s,t)$ gegeven continue functies, bovendien is $K(s,t)$ symmetrisch. $\varphi(s)$ moet bepaald worden, λ is een willekeurige parameter.

Evenals in de vorige paragraaf ga men weer uit van een volledig systeem van orthogonale functies $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots\ldots$, waarmee men de functies $k_q(s)$ en de grootheden k_{pq} als volgt vormt:

$$k_q(s) = \int_a^b K(s,t)\,\Phi_q(t)\,dt,$$

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,dt\,ds.$$

Aangezien $K(s,t)$ symmetrisch is, is

$$k_{pq} = k_{qp}.$$

Weer is

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}^2 \leqq \int_a^b \int_a^b \Big(K(s,t)\Big)^2 ds\,dt, \quad \text{(zie blz. 64)}$$

zoodat dus

$$K(x,y) = \sum_{pq=1}^{\infty} k_{pq}\,x_p\,y_q$$

een volkomen continue, symmetrische, bilineaire vorm is en men dus, volgens § 1 van hoofdstuk III $K(x)$ door middel van eene orthogonale substitutie als de som van de kwadraten van orthogonale lineaire vormen kan schrijven; derhalve geldt de betrekking

$$\text{(1)} \qquad K(x) = k_1\,x_1'^2 + k_2\,x_2'^2 + \ldots\ldots$$

Hierin zijn $x_1', x_2', \ldots\ldots$ orthogonale lineaire vormen der oneindige vele veranderlijken $x_1, x_2, \ldots\ldots$ Onder deze $k_1, k_2, \ldots\ldots$ zijn er wellicht, die de waarde nul hebben; de lineaire vormen, die bij deze coëfficiënten behooren, zullen wij afzonderen; laten deze zijn

$$x_{h1}' = M_1(x) = m_{11}\,x_1 + m_{12}\,x_2 + \ldots\ldots$$
$$x_{h2}' = M_2(x) = m_{21}\,x_1 + m_{22}\,x_2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De overige k's geve men door $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\ldots$ en de lineaire vormen, die er bij behooren, door

$$L_1(x) = l_{11} x_1 + l_{12} x_2 + \dots\dots$$
$$L_2(x) = l_{21} x_1 + l_{22} x_2 + \dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

aan; formule (1) wordt dus

$$K(x) = \varkappa_1 \Big(L_1(x)\Big)^2 + \varkappa_2 \Big(L_2(x)\Big)^2 + \dots\dots$$

Bij de methode, die hier ontwikkeld zal worden, spelen de betrekkingen, die er tusschen de vormen $L_1(x), L_2(x), \dots\dots, M_1(x), M_2(x), \dots\dots$ en $K(x, y)$ bestaan eene voorname rol; ik zal daarom deze betrekkingen, die reeds in § 1 van Hoofdstuk III afgeleid zijn, nog eens herhalen.

De betrekkingen

$$L_p(\cdot)\, L_q(\cdot) = 0,$$
$$L_p(\cdot)\, L_p(\cdot) = 1,$$
$$L_p(\cdot)\, M_q(\cdot) = 0,$$

duiden aan, dat die vormen orthogonaal zijn.

Aangezien de L's en de M's te zamen een *volledig* orthogonaal systeem vormen, heeft men ook nog de betrekking

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots\dots = (L_1(x))^2 + (L_2(x))^2 + \dots\dots$$
$$+ (M_1(x))^2 + (M_2(x))^2 + \dots\dots,$$

die ook aldus te schrijven is:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots\dots = L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \dots\dots$$
$$+ M_1(x) M_1(y) + M_2(x) M_2(y) + \dots\dots$$

Bovendien is

$$K(x, \cdot)\, L_p(\cdot) = \varkappa_p L_p(x)$$

en

$$K(x, \cdot)\, M_p(\cdot) = 0.$$

De methode, die bij de integraalvergelijking met symmetrische kern gebezigd wordt, vertoont groote overeenkomst met die, welke in de vorige paragraaf behandeld is en bestaat hierin, dat men van de volkomen continuïteit der lineaire vormen $L_1(x)$, $L_2(x), \dots\dots$ gebruik maakt, door voor de veranderlijken x_1, $x_2, \dots\dots$ geschikte functies van s te nemen; de aldus verkregen reeks is uniform continu in s en laat zich gemakkelijk term voor term integreeren. Voor die functies van s kiest men evenals in de vorige paragraaf

$$k_1(s),\ k_2(s),\ \dots\dots,$$

zoodat dus

$$L_p(k(s)) = l_{p1} k_1(s) + l_{p2} k_2(s) + \dots\dots$$

en

$$(2) \qquad \int_a^b L_p\Big(k(s)\Big)\, \Phi_q(s)\, ds = l_{p1} k_{q1} + l_{p2} k_{q2} + \dots\dots\dots$$

is. De laatste betrekking laat zich nog anders schrijven. Wij weten namelijk, dat

$$K(x \quad L \quad \cdot) = \varkappa\ \ L_p(x)$$

is; vergelijkt men nu de coëfficiënten van x_q in de beide leden dezer vergelijking met elkander, dan vindt men

$$\sum_{r=1}^{\infty} l_{pr}\, \varkappa_{qr}\, x_q = \varkappa_p\, l_{pq}\, x_q,$$

of

$$l_{p1}\, \varkappa_{q1} + l_{p2}\, \varkappa_{q2} + \ldots\ldots = \varkappa_p\, l_{pq},$$

zoodat men dus voor (2) ook

(3) $$\int_a^b \mathrm{L}_p \Big(k\,(s)\Big)\, \Phi_q\,(s)\, ds = \varkappa_p\, l_{pq}$$

mag schrijven.

Stelt men

(4) $$\mathrm{L}_p\,(k\,(s)) = \varkappa_p\, \phi_p\,(s), \qquad \varkappa_p \neq 0$$

dan gaat (3) over in

(5) $$\int_a^b \phi_p\,(s)\, \Phi_q\,(s)\, ds = l_{pq}.$$

Wij zien dus, dat de coëfficiënten l_{p1}, l_{p2}, ... in den lineairen vorm $\mathrm{L}_p(x)$ de Fourier-coëfficiënten zijn van zekere continue functie $\phi_p(s)$ met betrekking tot het orthogonale volledige stelsel $\Phi_1\,(s)$, $\Phi_2\,(s)$, ...

Het zal blijken, dat de aldus gedefinieerde functies $\phi_1\,(s)$, $\phi_2\,(s)$, ... de homogene integraalvergelijking oplossen, en bovendien de volgende eigenschappen bezitten:

$$\int_a^b \phi_p\,(s)\, \phi_q\,(s)\, ds = 0,$$

$$\int_a^b \Big(\phi_p\,(s)\Big)^2 ds = 1.$$

De orthogonaliteit der functies $\phi_1\,(s)$, $\phi_2\,(s)$, ... bewijst men door in de volledigheidsbetrekking

$$u\,(s) = \phi_p\,(s) \quad \text{en} \quad v\,(s) = \phi_q\,(s)$$

te stellen, waardoor men tot de volgende vergelijking komt:

$$\int_a^b \phi_p\,(s)\, \phi_q\,(s)\, ds = l_{p1}\, l_{q1} + l_{p2}\, l_{q2} + \ldots\ldots = \mathrm{L}_p\,(\cdot)\, \mathrm{L}_q\,(\cdot) = 0.$$

Voor

$$p = q$$

vindt men

(5) $$\int_a^b \Big(\phi_p\,(s)\Big)^2 ds = l_{p1}^2 + l_{p2}^2 + \ldots\ldots = \mathrm{L}_p\,(\cdot)\, \mathrm{L}_p\,(\cdot) = 1.$$

Volgens de volledigheidsbetrekking is bovendien

$$\int_a^b \mathrm{K}\,(s,\, t)\, \phi_p\,(t)\, dt = k_1\,(s)\, l_{p1} + k_2\,(s)\, l_{p2} + \ldots\ldots = \varkappa_p\, \phi_p\,(s),$$

of, indien men $\varkappa_p = \dfrac{1}{\lambda_p}$ stelt,

$$\phi_p\,(s) = \lambda_p \int_a^b \mathrm{K}\,(s,\, t)\, \phi_p\,(t)\, dt.$$

De homogene symmetrische integraalvergelijking

$$(6) \qquad \Phi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt$$

bezit dus zeker voor $\lambda = \lambda_p$ eene oplossing $\Phi(s) = \Phi_p(s)$, die niet identiek nul is; dit laatste volgt uit betrekking (5). λ_p is eene hoofdwaarde en $\Phi_p(s)$ eene karakteristieke functie der homogene integraalvergelijking (6).

Als laatste toepassing van de theorie der bilineaire vormen van oneindig vele veranderlijken, zal ik thans de ontwikkelbaarheid bespreken van functies in reeksen, waarvan de termen door karakteristieke functies gevormd worden. Bij het bewijs dezer stelling, gaat men uit van de betrekking

$$(7) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots\ldots = L_1(x)\,L_1(y) + L_2(x)\,L_2(y) + \ldots\ldots,$$

waarin men, zooals dat al meermalen heeft plaats gehad, voor de veranderlijken $x_1, x_2, \ldots\ldots$ en $y_1, y_2, \ldots\ldots$ geschikte functies van s kiest; en wel stelle men bij deze afleiding

$$x_p = g_p = \int_a^b g(s)\,\Phi_p(s)\,ds,$$

waarin $g(s)$ eene willekeurige continue functie van s is.

Voor y_p, stelle men

$$k_p(s) = \int_a^b K(s,t)\,\Phi_p(t)\,dt.$$

Het linkerlid van (7) wordt derhalve

$$g_1\,k_1(s) + g_2\,k_2(s) + \ldots\ldots,$$

voor welke reeks men, in verband met de volledigheidsbetrekking, ook

$$\int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt$$

mag schrijven.

Om na te gaan, welke gedaante het tweede lid van (7) na de substitutie aanneemt, moeten eenige beschouwingen voorafgaan over de reeks

$$L_1(x)\,L_1(y) + L_2(x)\,L_2(y) + \ldots\ldots + M_1(x)\,M_1(y) + \ldots\ldots$$

Om te beginnen blijkt $M_p(k(s))$, d. i. $M_p(x)$, waarin $x_1 = k_1(s)$, $x_2 = k_2(s), \ldots\ldots$ gesteld is, nul te zijn; want uit

$$M_p(k(s)) = m_{p1}\,k_1(s) + m_{p2}\,k_2(s) + \ldots\ldots$$

of

$$\int_a^b M_p\Big(k(s)\Big)\Phi_q(s)\,ds = m_{p1}\,k_{q1} + m_{p2}\,k_{q2} + \ldots\ldots$$

volgt, in verband met de betrekking

$$K(x,\cdot)\,M_p(\cdot) = m_{p1}\,k_{q1} + m_{p2}\,k_{q2} + \ldots\ldots = 0,$$

dat

$$\int_a^b M_p\Big(k(s)\Big)\Phi_q(s)\,ds = 0$$

is.

Door nu in de volledigheidsbetrekking

$$u(s) = v(s) = M_p(k(s))$$

te stellen, vindt men

$$\int_a^b \Big\{M_p\Big(k(s)\Big)\Big\}^2 ds = 0,$$

zoodat dus identiek in s

$$M_p(k(s)) = 0$$

is.

Verder leert nog eene nadere beschouwing van de reeks

$$L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \ldots\ldots,$$

dat deze absoluut en uniform in de y's convergeert voor

$$(y, y) \leqq M,$$

in welke ongelijkheid M een eindig getal is. De juistheid van deze bewering ziet men in, door op te merken, dat

$$\Big(L_1(x)\Big)^2 + \Big(L_2(x)\Big)^2 + \ldots\ldots \leqq (x, x)$$

en dus

(8) $$L_1(x) L_1(y) + L_2(x) L_2(y) + \ldots\ldots$$

een volkomen continue vorm in $L_1(y)$, $L_2(y)$, ... is, indien (x, x) eindig is; maar aangezien de $L(y)$'s zelf continue lineaire vormen in de y's zijn, convergeert (8) volgens (XXXXI) ook uniform en absoluut in de y's voor $(y, y) \leqq M$.

Na deze beschouwingen kunnen wij nagaan wat het rechterlid van (7) wordt, wanneer men

$$x_p = g_p \quad \text{en} \quad y_p = k_p(s)$$

stelt.

De lineaire vorm $L_p(x)$ gaat over in

$$L_p(g) = l_{p1} g_1 + l_{p2} g_2 + \ldots\ldots,$$

waarvoor men wegens betrekking (5) ook mag schrijven

(9) $$L_p(g) = \Phi_{p1} g_1 + \Phi_{p2} g_2 + \ldots\ldots$$

Hierin is

$$\Phi_{pq} = \int_a^b \Phi_p(s) \Phi_q(s) ds.$$

Wegens de volledigheidsbetrekking gaat vergelijking (9) over in

$$L_p(g) = \int_a^b g(s) \Phi_p(s) ds.$$

Ten slotte moet in $L_p(y)$ nog gesubstitueerd worden

$$y_q = k_q(s),$$

zoodat deze lineaire vormen door $L_p(k(s))$ voorgesteld worden, of volgens (4) door

$$\varkappa_p \Phi_p(s).$$

Aangezien $M_q(k(s)) = 0$ is, gaat het tweede lid van (7) over in

$$\left(\int_a^b g(s)\,\Phi_1(s)\,ds\right)\left(\varkappa_1\,\Phi_1(s)\right)+\left(\int_a^b g(s)\,\Phi_2(s)\,ds\right)\left(\varkappa_2\,\Phi_2(s)\right)+\ldots\ldots$$

Stellen wij nu

$$\text{(10)}\qquad F(s)=\int_a^b K(s,t)\,g(t)\,dt$$

en

$$c_p=\int_a^b F(s)\,\Phi_p(s)\,ds=\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\Phi_p(s)\,g(t)\,ds\,dt$$
$$=\int_a^b g(t)\int_a^b K(s,t)\,\Phi_p(s)\,ds\,dt$$
$$=\varkappa_p\int_a^b g(t)\,\Phi_p(t)\,dt,$$

dan vindt men

$$\text{(11)}\qquad F(s)=c_1\,\Phi_1(s)+c_2\,\Phi_2(s)+\ldots\ldots$$

Eene functie $F(s)$, welke voldoet aan voorwaarde (10), is dus op de wijze van eene reeks van Fourier te ontwikkelen in eene absoluut en uniform convergeerende reeks, waarvan de termen gevormd worden door de karakteristieke functies van den symmetrischen kern $K(s, t)$.

§ 3. Oplossing van de inhomogene integraalvergelijking m symmetrische kern.

Ons uitgangspunt is weer de integraalvergelijking

$$\text{(1)}\qquad f(s)=\Phi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt.$$

$K(s, t)$ is weer symmetrisch, $f(s)$ en $K(s, t)$ beide continu, $\Phi(s)$ wordt gezocht. Ondersteld wordt verder, dat λ geene hoofdwaarde is, dit wil zeggen, dat de homogene integraalvergelijking

$$\text{(2)}\qquad \Phi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt.$$

voor die waarde van λ geene oplossing toelaat, die niet identiek nul is.

Wij weten reeds uit § 1 van dit hoofdstuk, dat in dit geval de inhomogene integraalvergelijking (1) wel eene oplossing toelaat. Stellen wij, om deze oplossing te vinden,

$$\Phi(s)=f(s)+F(s),$$

dan wordt, in verband met (1),

$$\text{(3)}\qquad F(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\Big(f(t)+F(t)\Big)dt$$

de vergelijking, waaraan door eene continue functie $F(s)$ voldaan moet worden.

Volgens het ontwikkelingstheorema van de vorige paragraaf is dus

$$(4) \qquad F(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu(s) \int_a^b F(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt.$$

Uit (3) volgt echter, door met $\Phi_\nu(s)\, ds$ te vermenigvuldigen en van a tot b te integreeren,

$$\int_a^b F(s)\, \Phi_\nu(s)\, ds = \lambda \int_a^b \Big\{ f(t) + F(t) \Big\} dt. \int_a^b K(s, t)\, \Phi_\nu(s)\, ds.$$

en, daar $\Phi_\nu(s)$ eene oplossing is van (2), waarin voor λ de hoofdwaarde λ_ν genomen is, blijkt

$$\int_a^b F(s)\, \Phi_\nu(s)\, ds = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt + \frac{\lambda}{\lambda_\nu} \int_a^b F(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt$$

te zijn.

Wij krijgen dus

$$(6) \qquad \int_a^b F(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt = \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt$$

Dit in verband met (4) geeft

$$F(s) = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt$$

of

$$(7) \qquad \Phi(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt.$$

Omgekeerd kunnen wij uitgaan van (7) en aantoonen, dat $\Phi(s)$ aan de integraalvergelijking (1) voldoet. Eerst dient dan nog te worden aangetoond, dat

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt$$

absoluut en uniform convergeert voor $\lambda \neq \lambda_\nu$ wat geschiedt door middel van de betrekking

$$(9) \qquad \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt = \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_\nu}} \int_a^b K(s, t)\, \Phi_\nu(t)\, dt. \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt.$$

Op dezelfde manier, als wij hebben aangetoond, dat de reeks (11) blz. 73 absoluut en uniform in s convergeert, toont men aan, dat

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b K(s, t)\, \Phi_\nu(t)\, dt. \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt$$

uniform en absoluut convergeert, hetgeen dezelfde eigenschappen meebrengt voor reeks (9); want, indien het aantal hoofdwaarden oneindig is, weet men, dat zij zich slechts in het oneindige ophoopen; voor $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_\nu}}$ is derhalve eene grootste waarde aan te geven en dus bezit reeks (9) en ook reeks (8) de ondersteIde eigenschappen. Wij kunnen nu gemakkelijk aantoonen, dat (7) aan integraalvergelijking (1) voldoet.

$$\int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt = \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b K(s,t)\,\Phi_\nu(t)\,dt . \int_a^b f(t)\,\Phi_\nu(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b f(t)\,\Phi_\nu(t)\,dt + \int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt.$$

Nu is volgens het ontwikkelingstheorema van § 2 van dit hoofdstuk

$$\int_a^b K(s,t)\,f(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \int_a^b f(t)\,\Phi_\nu(t)\,dt$$

en dus

$$\int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\,\Phi_\nu(t)\,dt = \frac{\Phi(s) - f(s)}{\lambda}$$

of

$$\Phi(s) = f(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,\Phi(t)\,dt,$$

zoodat dus door $\Phi(s)$ aan de integraalvergelijking voldaan wordt.

Is nu λ eene n-voudige hoofdwaarde, d. w. z. heeft voor die waarde van λ de homogene integraalvergelijking n oplossingen, dan weet men reeds uit de beschouwingen van § 1, Hoofdstuk IV, dat de inhomogene vergelijking (1) slechts dan eene oplossing toelaat, wanneer $f(s)$ voldoet aan de n voorwaarden (18), bl. 67; wegens de symmetrie van den kern $K(s,t)$ gaan deze voorwaarden over in n betrekkingen van de gedaante

$$\int_a^b f(t)\,\Phi_\nu(t)\,dt = 0,$$

waarbij Φ_ν elk der n oplossingen voorstelt van de homogene integraalvergelijking met de hoofdwaarde λ.

Zijn $1, 2, \ldots\ldots, n$ de waarden van ν, waarvoor $\Phi_\nu(s)$ bij de hoofdwaarde λ behoort, dan is nu, wanneer aan de n voorwaarden voldaan is, de oplossing van vergelijking (1)

$$\Phi(s) = f(s) + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\,\Phi_\nu(s) + \lambda \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\,\Phi_\nu(t)\,dt,$$

waarin a_ν willekeurige constanten zijn; men verifieert deze oplossing door substitutie.

HOOFDSTUK V.

Dit hoofdstuk zal ik aanvangen met in het kort de oplossingsmethode van VOLTERRA te bespreken; deze en de hierboven behandelde methode, met elkaar in verband gebracht, geven een middel aan de hand, om van eenige symmetrische kernen de hoofdwaarden en de karakteristieke functies te bepalen.

§ 1. Oplossingsmethode van Volterra.

$K(s, t)$ zij weer eene continue symmetrische functie van s en t in het interval (a, b); bij deze symmetrische kern bepale men de zoogenaamde geïtereerde kernen $K_1, K_2, \ldots\ldots$, welke als volgt gedefinieerd worden:

$$K_1(s, t) = K(s, t),$$

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, \tau) K(\tau, s)\, d\tau$$

$$K_3(s, t) = \int_a^b K(s, \tau) K_2(\tau, t)\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$K_i(s, t) = \int_a^b K(s, \tau) K_{i-1}(\tau, t)\, d\tau.$$

Men ziet onmiddellijk in, dat de definitie van de geïtereerde kernen de volgende betrekkingen meebrengt:

$$K_i(s, t) = \int_a^b \ldots\ldots \int_a^b K(s, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) \ldots\ldots K(\tau_{i-1}, t)\, d\tau_{i-1} \ldots\ldots d\tau_1,$$

$$K_j(s, t) = \int_a^b \ldots\ldots \int_a^b K(s, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) \ldots\ldots K(\tau_{j-1}, t)\, d\tau_{j-1} \ldots\ldots d\tau_1,$$

$$K_{i+j}(s, t = \int_a^b \ldots\ldots \int_a^b K(s, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) \ldots\ldots K(\tau_{i+j-1}, t) d\tau_{i+j-1} \ldots\ldots d\tau_1.$$

Uit deze drie betrekkingen volgt, dat

(1) $$K_{i+j}(s, t) = \int_a^b K_i(s, \tau) K_j(\tau, t)\, d\tau$$

is.

Met de geïtereerde kernen, vorme men de reeks

$$\overline{K(s, t)} = K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \lambda^2 K_3(s, t) + \ldots\ldots,$$

waarvan wij onderstellen zullen, dat zij voor waarden van s en t, tusschen a en b gelegen, uniform convergeert.

De som van de eerste n termen van $\overline{K(s,t)}$ duide men aan door $S_n(s,t)$ en de daarbij behoorende rest door $R_n(s,t)$, waarvoor dus de volgende betrekking geldt:

$$R_n(s,t) = \lambda^n K_{n+1}(s,t) + \lambda^{n+1} K_{n+2}(s,t) + \lambda^{n+2} K_{n+3}(s,t) + \ldots\ldots$$
$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(s,t).$$

Volgens (1) mag men hiervoor ook schrijven

$$(2) \qquad R_n(s,t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda^{i-1} \int_a^b K_{i-j}(s,\tau)\, K_j(\tau,t)\, d\tau,$$

in welke vergelijking j nog bij elke term mag varieeren, mits $j < i$ blijft.

Neemt men in (2) eerst voor j de waarde n, en daarna de waarde $i - n$, dan vindt men achtereenvolgens

$$R_n(s,t) = \lambda^n \int_a^b \overline{K(s,\tau)}\, K_n(\tau,t)\, d\tau$$

en

$$R_n(s,t) = \lambda^n \int_a^b K_n(s,\tau)\, \overline{K(\tau,t)}\, d\tau$$

Door in deze laatste betrekkingen voor n de waarde 1 te nemen en te bedenken, dat

$$R_1(s,t) = \overline{K(s,t)} - K_1(s,t)$$

is, vindt men de volgende twee belangrijke eigenschappen:

$$\overline{K(s,t)} - K(s,t) = \lambda \int_a^b \overline{K(s,\tau)}\, K(\tau,t)\, d\tau$$

en

$$\overline{K(s,t)} - K(s,t) = \lambda \int_a^b K(s,\tau)\, \overline{K(\tau,t)}\, d\tau.$$

Deze betrekkingen zijn in het overzicht van hoofdstuk I langs geheel anderen weg afgeleid, en dan nog wel met dit verschil, dat de aldaar gevonden functie $\overline{K(s,t)}$ (reciproke functie), met uitzondering van de zoogenaamde hoofdwaarden, beteekenis had voor alle waarden van λ, terwijl de hierboven gebezigde vorm van $\overline{K(s,t)}$, alleen beteekenis heeft voor die waarden van λ, waarvoor de reeks

$$(3) \qquad K_1(s,t) + \lambda K_1(s,t) + \lambda^2 K_2(s,t) + \ldots\ldots$$

convergeert. Uit de eenwaardigheid der reciproke functie volgt verder, dat in het gebied, waar de reeksontwikkeling (3) beteekenis heeft, zij slechts een bijzondere vorm is van de algemeene gedaante der resolvente, waarvoor wij in hoofdstuk I

$$-\frac{\Delta(\lambda; s,t)}{\delta(\lambda)}$$

vonden.

In hoofdstuk I blz. (6) bleek bovendien, dat de oplossing der integraalvergelijking

$$(4) \qquad f(s) = \Phi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\, \Phi(t)\, dt,$$

waarin λ geene hoofdwaarde is, de gedaante

$$\Phi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \overline{K(s,t)}\, f(t)\, dt$$

heeft.

In hoofdstuk IV vonden wij voor de oplossing van vergelijking (4) bij enkelvoudige hoofdwaarden

$$\Phi(s) = f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b f(t)\, \Phi_\nu(t)\, dt.$$

Aangezien de oplossing éénwaardig is, is

$$\int_a^b \overline{K(s,t)}\, f(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\Phi_\nu(s)\, \Phi_\nu(t)}{\lambda_\nu - \lambda} f(t)\, dt$$

en uit het feit, dat deze vergelijking voor alle continue functies $f(t)$ moet doorgaan, mag men besluiten tot de gelijkheid

$$(5) \qquad \overline{K(s,t)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Phi_\nu(s)\, \Phi_\nu(t)}{\lambda_\nu - \lambda}$$

of tot de vergelijking

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t) = \sum \frac{\Phi_\nu(s)\, \Phi_\nu(t)}{\lambda_\nu - \lambda}$$

Deze betrekking leert ons, dat de polen van de resolvente $\overline{K(s,t)}$ de hoofdwaarden zijn, die behooren bij den symmetrischen kern $K(s,t)$; het is deze betrekking, waarvan bij de volgende voorbeelden gebruik zal gemaakt worden.

§ 2. Onderzoek van eenige symmetrische kernen. [1])

Zij gegeven de in s en t symmetrische kern

$$K(s,t) = \cos(s+t) + \cos(s-t).$$

Hiervan zal ik in het interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de resolvente bepalen; deze is van den vorm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t) \quad ,$$

waarin $K_n(s,t)$ zeker de volgende gedaante heeft

$$K_n(s,t) = A_n \cos(s+t) + B_n \cos(s-t) + C_n \sin(s+t).$$

Kan men nu A_n, B_n en C_n als functies van n vinden, dan heeft men dus de algemeene gedaante van

$$K_n(s,t)$$

1) Hilbert en Schmidt hebben in de reeds vroeger aangehaalde verhandelingen aangetoond, dat een symmetrische kern minstens ééne hoofdwaarde heeft.

en hiermee ook de resolvente $\overline{K(s,t)}$ gevonden. Teneinde A_n, B_n en C_n als functies van n te vinden ga men als volgt te werk; men heeft

$$K_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(s+\tau)+\cos(s-\tau)\}\{A_n\cos(\tau+t)+B_n\cos(\tau-t)+C_n\sin(\tau+t)\}d\tau.$$

Werkt men de integraties uit, dan komt er

$$K_{n+1}=\frac{A_n}{2}\left[\frac{\pi}{2}\cos(s+t)+\sin(s-t)\right]+\frac{B_n}{2}\left[\frac{\pi}{2}\cos(s+t)+\sin(s+t)\right]+$$
$$+\frac{C_n}{2}\left[\frac{\pi}{2}\sin(s+t)+\cos(t-s)\right]$$

of

$$A_{n+1}\cos(s+t)+B_{n+1}\cos(s-t)+C_{n+1}\sin(s+t)=$$
$$=\left(\frac{A_n\pi}{4}+\frac{B_n\pi}{4}+\frac{C_n}{2}\right)\cos(s+t)+\left(\frac{A_n\pi}{4}+\frac{B_n\pi}{4}+\frac{C_n}{2}\right)\cos(s-t)+$$
$$+\left(-\frac{A_n}{2}+\frac{B_n}{2}+\frac{C_n\pi}{4}\right)\sin(s+t).$$

Gelijkstelling van de coëfficiënten geeft

$$A_{n+1}=\frac{B_n\pi}{4}+\frac{C_n}{2}+\frac{A_n\pi}{4},$$
$$B_{n+1}=\frac{A_n\pi}{4}+\frac{B_n\pi}{4}+\frac{C_n}{2},$$
$$C_{n+1}=-\frac{A_n}{2}+\frac{B_n}{2}+\frac{C_n\pi}{4},$$

Men vindt dus

$$A_{n+1}=\frac{\pi}{2}A_n, \qquad A_{n+1}=B_{n+1}, \qquad C_{n+1}=0,$$

of

$$A_{n+1}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n, \quad A_1=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

Hieruit volgt dus

$$K_n=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\cos(s+t)+\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\cos(s-t)$$

en

$$\sum_1^\infty \lambda^{n-1}K_n(s,t)=\{\cos(s+t)+\cos(s-t)\}\sum_1^\infty\lambda^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}=$$
$$=\{\cos(s+t)+\cos(s-t)\}\frac{1}{1-\lambda\frac{\pi}{2}};$$

dus volgens (5), § 1 van dit hoofdstuk is

(1) $$\frac{\frac{2}{\pi}\{\cos(s+t)+\cos(s-t)\}}{\frac{2}{\pi}-\lambda}=\sum\frac{\Phi_\nu(s)\Phi_\nu(t)}{\lambda_\nu-\lambda}.$$

Er is dus ééne hoofdwaarde, namelijk $\lambda_\nu = \frac{2}{\pi}$ en wij zullen de hierbij behoorende karakteristieke functies berekenen; om 't aantal ervan te bepalen bedenke men, dat men heeft

$$\int_a^b \sum \left(\varphi_\nu(s)\right)^2 ds = n;$$

volgens (1) heeft men

$$\left(\varphi_\nu(s)\right)^2 = \frac{2}{\pi}\left(\cos(2s) + 1\right),$$

dus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum \left(\varphi_\nu(s)\right)^2 ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos(2s) + 1 \right\} ds = 1.$$

Er is dus ééne karakteristieke functie, die wij als volgt vinden:

$$\frac{\pi}{2}\left\{ \cos(s+t) + \cos(s-t) \right\} = \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t),$$

$$\pi \cos s \cos t = \varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t),$$

$$\varphi_\nu(s) = \sqrt{\pi}\cos s.$$

Hiermee heeft men dus de hoofdwaarde en de karakteristieke functie van den kern

$$\cos(s+t) + \cos(s-t)$$

gevonden. Men had ook anders te werk kunnen gaan; voor $\cos(s+t) + \cos(s-t)$ laat zich namelijk ook $2 \cos s \cos t$ schrijven, hetgeen van den vorm $f(s)\,f(t)$ is; van alle kernen, die als het product van twee functies zijn te schrijven, laten zich de hoofdwaarden en karakteristieke functies bepalen; dit blijkt uit de volgende berekening:

$$K_1 = f(s)\,f(t),$$

$$K_2 = \int_a^b f(s)\,f^2(\tau)\,f(t)\,d\tau = K_1 \int_a^b \left(f(\tau)\right)^2 d\tau,$$

$$K_3 = \left[\int_a^b \left(f(\tau)\right)^2 d\tau\right]^2 K_1.$$

Door

$$\int_a^b \left(f(\tau)\right)^2 d\tau = P$$

te stellen, gaat K_n over in

$$K_n = P^{n-1} K_1.$$

De resolvente $\overline{K(s,t)}$ wordt dus

$$\sum_1^\infty \lambda^{n-1} K_n(s,t) = \sum_1^\infty \lambda^{n-1} P^{n-1} K_1 = f(s)\,f(t) \sum_1^\infty \lambda^{n-1} P^{n-1}$$

$$= f(s)\,f(t)\frac{1}{1-\lambda P}$$

$$= \frac{\frac{1}{P} f(s)\,f(t)}{\frac{1}{P} - \lambda}.$$

Er is dus steeds eene hoofdwaarde, namelijk $\lambda_1 = \frac{1}{P}$ en éénc karakteristieke functie.

Om een tweede voorbeeld te behandelen neem ik als kern

$$K(s, t) = \cos(s + t) + \sin(s + t).$$

$K_n(s, t)$ is zeker van den vorm

$$A_n \cos(s + t) + B_n \cos(s - t) + C_n \sin(s + t),$$

zoodat dus de volgende betrekking geldt

$$K^{n+1}(s, t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos(s + \tau) + \sin(\tau + t) \right\} \left\{ A_n \cos(\tau + t) + B_n \cos(\tau - t) + \right.$$
$$\left. + C_n \sin(\tau + t) \right\} d\tau.$$

Na uitwerking der integraties en gelijkstelling der coëfficiënten in de beide leden der laatste vergelijking vindt men

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{A_n}{2} + \frac{B_n \pi}{2} + \frac{C_n}{2}, \\ B_{n+1} &= \frac{A_n \pi}{2}, \\ C_{n+1} &= -\frac{A_n}{2} + \frac{B_n \pi}{4} + \frac{C_n}{2}, \end{aligned}$$

stel

$$\text{(2)} \qquad P_n = p\,A_n + q\,B_n + r\,C_n.$$

In deze laatste betrekking zullen wij de constanten p, q en r zoo bepalen, dat

$$P_{n+1} = \rho\,P_n$$

is, zoodat

$$P_{n+1} = \rho^n\,P_1$$

is. Door dit op 3 verschillende manieren te doen, verkrijgt men 3 vergelijkingen, waaruit A_n, B_n en C_n als functies van n kunnen worden opgelost.

Uit (1) en (2) volgt, dat

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= p\,A_{n+1} + q\,B_{n+1} + r\,C_{n+1} \\ &= \frac{p}{2} A_n + \frac{p\,B_n \pi}{4} + \frac{p\,C_n}{2} + \frac{q\,A_n \pi}{2} - \frac{r\,A_n}{2} + \frac{r\,B_n}{4} + \frac{r\,C_n}{2} \\ &= \left(\frac{p}{2} + \frac{q\,\pi}{2} - \frac{r}{2}\right) A_n + \left(\frac{p\,\pi}{4} + \frac{r\,\pi}{4}\right) B_n + \left(\frac{p}{2} + \frac{r}{2}\right) C_n \end{aligned}$$

is; p, q en r moeten dus zoo bepaald worden, dat

$$\frac{p + q\,\pi - r}{2\,p} = \frac{\pi\,(p + r)}{4\,q} = \frac{p + r}{2\,r} = \rho$$

is en dit wel voor drie verschillende waarden van ρ.

Ik heb respectievelijk genomen

$$\rho_1 = 0 \quad , \qquad p = 1 \qquad , r = -1, \text{ en } q = -\frac{2}{\pi},$$

$$\rho_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}}{2}, \quad p = +\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}, \quad r = 1 \text{ en } q = \frac{\pi}{2},$$

$$\rho_3 = \frac{1 - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}}{2}, \quad p = -\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}, \quad r = 1 \text{ en } q = \frac{\pi}{2}.$$

Men verkrijgt derhalve de 3 volgende vergelijkingen waaruit A_n, B_n en C_n als functies van n zijn op te lossen

$$0 = A_n - \frac{2}{\pi} B_n - C_n,$$

$$(3) \qquad Q_n = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\, A_n + \frac{\pi}{2} B_n + C_n,$$

$$R_n = -\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\, A_n + \frac{\pi}{2} B_n + C_n$$

en aangezien

$$Q_{n+1} = \rho_2 Q_n = \rho_2^n Q_1 = \frac{\left\{1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\right\}^{n+1}}{2^n}$$

en

$$R_{n+1} = \rho_3 R_n = \rho_3^n R_1 = \frac{\left\{1 - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\right\}^{n+1}}{2^n}$$

is, gaan de vergelijkingen (3) over in

$$0 = A_n - \frac{2}{\pi} B_n - C_n,$$

$$(4) \qquad \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\right)^n}{2^{n-1}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\, A_n + \frac{\pi}{2} B_n + C_n,$$

$$\frac{\left(1 + \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\right)^n}{2^{n-1}} = -\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1}\, A_n + \frac{\pi}{2} B_n + C_n.$$

Stel $\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - 1} = \varepsilon$.

Door A_n uit (4) op te lossen vindt men

$$(5^a) \qquad A_n = \frac{(1 + \varepsilon)^n - (1 - \varepsilon)^n}{2^n \varepsilon},$$

en in verband met (2)

(5[b]) $$B_n = \frac{\pi}{2} A_{n-1} = \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)^{n-1} - (1-\varepsilon)^{n-1}}{2^{n-1}},$$

(5[c]) $$C_n = 2 A_{n+1} - A_n - \frac{\pi^2}{4} A_n - 1,$$

en K_n is dus van de volgende gedaante:

$$A_n \cos(s+t) + \frac{\pi}{2} A_{n-1} \cos(s-t) + (2A_{n+1} - A_n - \frac{\pi^2}{4} A_{n-1}) \sin(s+t),$$

of

$$K_n = A_n \{\cos(s+t) - \sin(s+t)\} + \frac{\pi}{2} A_{n-1} \{\cos(s-t) - \frac{\pi}{2} \sin(s+t)\} + \\ + 2 A_{n+1} \sin(s+t).$$

Door nu

(6) $$\sin(s+t) = f_1(s,t), \\ \cos(s+t) - \sin(s+t) = f_2(s,t), \\ \cos(s+t) - \frac{\pi}{2} \sin(s+t) = f_3(s,t)$$

te stellen, verkrijgt K_n den meer overzichtelijken vorm

$$2 A_{n+1} f_1(s,t) + A_n f_2(s,t) + \frac{\pi}{2} A_{n-1} f_3(s,t).$$

Voor de resolvente kan men dus de volgende betrekking opschrijven

$$\overline{K(s,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t) = 2 f_1(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_{n+1} + f_2(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_n + \\ + \frac{\pi}{2} f_3(s,t) \sum_{1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_{n-1}.$$

Door middel van de betrekkingen 5[a], 5[b] en 5[c] kan men elken term van het 2[e] lid der laatste vergelijking afzonderlijk berekenen, en wel als volgt:

$$2 f_1(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_{n+1} = 2 f_1(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(1+\varepsilon)^{n+1} - (1-\varepsilon)^{n+1}}{2^{n+1} - \varepsilon}$$

$$= 2 f_1(s,t) \frac{(1+\varepsilon)^2}{2^2 \varepsilon} \frac{1}{1 - \lambda \frac{1+\varepsilon}{2}} - 2 f_1(s,t) \frac{(1-\varepsilon)^2}{1^2 2} \frac{1}{1 - \lambda \frac{1-\varepsilon}{2}},$$

$$f_2(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_n = f_2(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(1+\varepsilon)^n - (1-\varepsilon)^n}{2^n \varepsilon}$$

$$= f_2(s,t) \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{1}{1 - \lambda \frac{1+\varepsilon}{2}} - f_2(s,t) \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{1}{1 - \lambda \frac{1-\varepsilon}{2}},$$

$$\frac{\pi}{2} f_3(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A_{n-1} = \frac{\pi}{2} f_3(s,t) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{(1+\varepsilon)^{n-1} - (1-\varepsilon)^{n-1}}{2^{n-1} \varepsilon}$$

$$= \frac{\pi}{2} f_3(s,t) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 - \lambda \frac{1+\varepsilon}{2}} - \frac{\pi}{2} f_3(s,t) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 - \lambda \frac{1-\varepsilon}{2}}.$$

(6) gaat dus ten slotte over in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(s,t) = \frac{f_1(s,t)\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} f_2(s,t) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\pi}{1+\varepsilon} f_3(s,t)}{\frac{2}{1+\varepsilon} - \lambda}$$

$$- \frac{f_1(s,t)\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} f_2(s,t) + \frac{\pi}{1-\varepsilon} f_3(s,t)}{\frac{2}{1-\varepsilon} - \lambda}$$

Er zijn derhalve twee hoofdwaarden nl.

$$\lambda_1 = \frac{2}{1+\varepsilon}, \qquad \lambda_2 = \frac{2}{1-\varepsilon}.$$

Om 't aantal karakteristieke functies te bepalen, behoorende bij λ_1 en λ_2 moet men nog berekenen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum \left(\Phi_\nu^{(1)}(s)\right)^2 ds \quad \text{en} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum \left(\Phi_\nu^{(2)}(s)\right)^2 ds;$$

de indices (1) en (2) geven aan, dat de Φ_ν's in de eerste integraal bij λ_1 en de Φ_ν's in de tweede integraal bij λ_2 behooren.

$\sum \left(\Phi_\nu^{(1)}(s)\right)^2$ en $\sum \left(\Phi_\nu^{(2)}(s)\right)^2$ verkrijgt men door in de tellers der breuken (7) t door s te vervangen en de betrekkingen (6) te gebruiken.

Men vindt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum \left(Q_\nu^{(1)}(s)\right)^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \sin 2s + \frac{1}{\varepsilon}\left(\cos 2s - \sin 2s\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \cos 2s - \frac{\pi^2}{2\varepsilon(1+\varepsilon)} \sin 2s \right\} ds;$$

deze integraal levert als uitkomst 1 op, zoo ook

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum \left(\Phi_\nu^{(2)}(s)\right)^2 ds.$$

De beide hoofdwaarden gaan dus vergezeld van ééne karakteristieke functie. De beide tellers van (7) moeten dus te schrijven zijn als

$$\Phi(s) \quad \Phi(t).$$

De teller van de eerste breuk laat zich schrijven als

$$(8) \quad \left(\sin s \cos t + \cos s \sin t\right)\left\{1 - \frac{\pi^2}{2\varepsilon(1+\varepsilon)}\right\} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\cos s \cos t - \sin s \sin t\right)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\pi}{1+\varepsilon}\left(\cos s \cos t + \sin s \sin t\right),$$

Deze vorm moet dus te ontbinden zijn in

$$(9) \qquad (A \sin s + B \cos s)(A \sin t + B \cos t).$$

Door gelijkstelling der coëfficiënten in de vormen (8) en (9) zijn A en B te berekenen, wij vinden dan de karakteristieke functie behoorende bij $\lambda_1 = \frac{2}{1+\varepsilon}$ genormeerd.

Gemakkelijker gaat men echter als volgt te werk. Men heeft

$$\Phi(s) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(s, t)\, \Phi(t)\, dt$$

dus

$$(10)\ A \sin s + B \cos s = \frac{2}{1+\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ \cos(s+t) + \sin(s+t) \Big\} \Big\{ A \sin t + B \cos t \Big\}\, dt,$$

door beide leden door B te deelen en $\frac{A}{B} = C$ te stellen, gaat (10) over in

$$C \sin s + \cos s = \frac{2}{1+\varepsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big\{ \cos(s+t) + \sin(s+t) \Big\} \Big\{ C \sin t + \cos t \Big\}\, dt.$$

Na uitwerking der integralen en gelijkstelling der coëfficienten vindt men

$$C = \frac{\varepsilon - \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}}$$

en voor de genormeerde karakteristieke functie

$$\frac{\cos s + \dfrac{\varepsilon - \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}} \sin s}{\sqrt{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t + \frac{\varepsilon - \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}} \sin t \right)^2 dt}}.$$

Bij de hoofdwaarde $\lambda^2 = \frac{2}{1-\varepsilon}$ behoort de karakteristieke functie

$$\frac{\cos t - \dfrac{\varepsilon + \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}} \sin s}{\sqrt{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t - \frac{\varepsilon + \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}} \sin t \right)^2 dt}}$$

De berekening van de hoofdwaarden en de karakteristieke functies van den kern

$$\cos(s+t) + \sin(s+t)$$

kan wat bekort worden door te bedenken, dat, wanneer $K_n(s, t)$ van den vorm

$$A_n \cos(s+t) + B_n \cos(s-t) + C_n \sin(s+t)$$

is, de resolvente ook deze gedaante heeft en men er dus

$$A \cos(s+t) + B \cos(s-t) + C \sin(s+t)$$

voor mag schrijven; de grootheden A, B en C vindt men uit de betrekking

$$\overline{K(s,t)} - K(s,t) = \lambda \int_a^b \overline{K(s,\tau)}\, K(\tau, t)\, dt.$$

Deze laatste methode ter bepaling van de resolvente kan men met vrucht toepassen op den kern

$$(s+t)^m.$$

Als resultaat vindt men

$$\overline{K(s,t)} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & C_m^m y^m & C_m^{m-1} y^{m-1} & & C_m^1 y \\ 1 & 1-\lambda\frac{C_m^0}{m+1} & -\lambda\frac{C_m^0}{m+2} & -\lambda\frac{C_m^0}{m+3} & \dots\dots & -\lambda\frac{C_m^0}{2m+1} \\ x & -\lambda\frac{C_m^1}{m} & 1-\lambda\frac{C_m^1}{m+1} & -\lambda\frac{C_m^1}{m+2} & \dots\dots & -\lambda\frac{C_m^1}{2m} \\ x^2 & -\lambda\frac{C_m^2}{m-1} & -\lambda\frac{C_m^2}{m} & -\lambda\frac{C_m^2}{m+1} & \dots\dots & -\lambda\frac{C_m^2}{2m+1} \\ \vdots & & & & & \\ x^m & -\lambda\frac{C_m^m}{1} & -\lambda\frac{C_m^m}{2} & & & 1-\lambda\frac{C_m^m}{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{C_m^0}{m+1} & -\lambda\frac{C_m^0}{m+2} & \dots\dots & -\lambda\frac{C_m^0}{2m+1} \\ -\lambda\frac{C_m^1}{m} & 1-\lambda\frac{C_m^1}{m+1} & \dots\dots & -\lambda\frac{C_m^1}{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\frac{C_m^m}{1} & -\lambda\frac{C_m^m}{2} & \dots\dots & 1-\lambda\frac{C_m^m}{m+1} \end{vmatrix}}$$

waarin C_m^p de p^e binominaal-coëfficiënt is van m.

Bij de hier behandelde kernen waren de polen van de resolvente enkelvoudig; dit is steeds het geval, wanneer de kern symmetrisch is.

STELLINGEN.

STELLINGEN.

1. De toepassingen, die ADOLF KNESER in zijn leerboek, getiteld „Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik", van de integraalvergelijkingen geeft, zijn niet geschikt om den lezer te overtuigen van het groote nut dezer vergelijkingen voor de theoretische natuurkunde.

2. De methode, welke NEUMANN gebezigd heeft om te bewijzen, dat het probleem van DIRICHLET oplosbaar is, verschilt in haar wezen niet van de methode, door FREDHOLM gevolgd.

3. Eene kern is geheel bepaald door hare hoofdwaarden (Eigenwerte) en karakteristieke functies (Eigenfunktionen).

4. Tweemaal differentiëeren is een middel, dat dikwijls bij eenvoudige kernen kan toegepast worden, om eene integraalvergelijking op te lossen; o. a. is dit het geval met de kernen, die in dit proefschrift behandeld zijn.

5. Hoewel de methode, door E. SCHMIDT gebezigd, om de lineaire integraalvergelijkingen te behandelen, sierlijk en vlug de meest belangrijke resultaten levert, geeft zij minder, dan de methode van FREDHOLM, een inzicht in het wezen der integraalvergelijking.

6. Bij de afleiding van de tweede stelling van het gemiddelde, maakt E. CESARO (Elementares Lehrbuch der algebraïschen Analysis und der Infinitesimalrechnung blz. 694) tenslotte de opmerking, dat, indien $f(x)$ bij de grenzen a en b discontinu is, men in de vergelijking

$$\int_a^b f(x)\,\Phi(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi \Phi(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b \Phi(x)\,dx$$

$f(a)$ en $f(b)$ moet vervangen door $f(a+0)$ en $f(b-0)$; dit is niet noodig.

Indien $f(x)$ stijgend is, mag men $f(a)$ en $f(b)$ vervangen door willekeurige getallen A en B, mits

$$A \leqq f(a+0) \text{ en } B \geqq f(b-0).$$

7. Het bewijs, dat KIEPERT (Grundriss der Differential- und Integralrechnung blz. 250) geeft van de betrekking

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots\dots\dots$$

is onjuist.

8. Door geen beroep te doen op het uniform continu zijn eener continue functie geeft WHITTAKER op blz. 42 van zijn Course of Modern Analysis een onvoldoend bewijs van het bestaan der integraal van zulk eene functie.

9. De methode, die in de analytische meetkunde *dikwijls gebezigd* wordt, om bijzonderheden, die zich in de vergelijkingen kunnen voordoen, af te leiden uit de meetkundige aanschouwing, is onvolledig.

10. De beschouwingen, die G. SCHEFFERS in zijn leerboek der differentiaal- en integraalrekening, 4e en 5e druk blz. 287, over asymptoten houdt, zijn onvoldoende.

11. Congruentie laat zich niet bewijzen door op elkaar leggen der figuren.

12. De gebruikelijke wijze, om tot de bewegingsvergelijkingen te komen, is het invoeren van krachten in plaats van verbindingen (het zoogenaamde vrijmaken der punten). Het blijft echter de vraag of verbindingen steeds door krachten vervangen kunnen worden.

13. In de theorie der integraalvergelijkingen worden zekere beschouwingen uit de oude electriciteitsleer weer opgevat.

14. Eene afleiding van de tweede hoofdwet der mechanische warmtetheorie, waarbij gebruik wordt gemaakt van de eigenschappen der ideale gassen, zooals dit in het leerboek van PLANCK geschiedt, verdient niet de voorkeur boven eene afleiding, welke daarop geen beroep doet, zooals die van BRYAN.

15. Het bezwaar, dat volgens den Heer A. D. FOKKER (dissertatie blz. 15) het verstand tegen eene werking op een afstand heeft, is het bezwaar, dat het verstand tegen elke werking heeft.

16. De afleiding van M. W. CROFTON der foutenwet, zooals CZUBER die op blz. 251 (2e druk) van het eerste deel van zijn boek over waarschijnlijkheidsrekening weergeeft, heeft het bezwaar, dat voor fouten, onderworpen aan verschillende voorwaarden, dezelfde foutenwet als geldig wordt aangenomen.

17. De philosophische beschouwingen, die prof. HOLLEMAN in de inleiding van zijn leerboek der Anorganische Chemie over onze kennis, omtrent de voorwerpen in de natuur, houdt, lijken mij op sommige punten moeilijk te verdedigen.

18. Het blijft de vraag of de voordeelen van het populariseeren van wetenschappen opwegen tegen het gevaar van misverstand.

19. Het ware wenschelijk, dat de studenten meer in de gelegenheid waren zich te oefenen in welsprekendheid en het zuivere gebruik der Nederlandsche taal.

20. Het verwerken van veel stof doodt bij de leerlingen de neiging tot zelfstandig denken. Daarom is beperking der leerstof op de H. B. S. aan te bevelen en is het ook al om die reden af te keuren, de beginselen der differentiaal- en integraalrekening op de H. B. S. in te voeren.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06820 9900



BOEKDRUKKERIJ VOORHEEN E. J. BRILL. — LEIDEN.